EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.5

JAARGANG 94 - MAART 2019



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 94 NR5



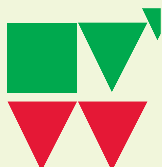
IN DIT NUMMER

Dale Chihuly, *Sapphire Neon Tumbleweeds*, 2016.
Tentoongesteld in het Groninger Museum in 2018.

Foto: Liesbeth Coffeng.

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN





Kort vooraf

Wíj weten natuurlijk allemaal dat de organisator van een loterij, gokwebsite of casino de enige ‘deelnemer’ is die zéker is van winst op de lange duur. Piet van Blokland, medeontwikkelaar van VUstat, bedacht een reeks apps met bijbehorend lesmateriaal om leerlingen ook tot dit rationele besef te laten komen. Dat gaat verder dan een moraliserende opmerking aan het eind van een opdracht als ‘misschien moet je toch eerst maar even nadenken voordat je een gok gaat wagen’. Het materiaal is in samenwerking met Slicks (ervaringsdeskundig expertisecentrum kansspelen) ontworpen om een maximaal preventief en minimaal stimulerend effect op het eventuele gokgedrag van leerlingen te hebben. We vonden dit artikel dusdanig relevant dat het het openingsartikel van deze *Euclides* is geworden.
Een ander soort loterij zijn de Nationale Wiskunde Dagen. 900 collega’s hadden het geluk ingeloot te zijn voor de feestelijke 25e editie. De NWD werd geopend door Jan de Lange, degene die 24 jaar geleden het evenement bedacht. Hem werd gevraagd of hij gedacht had dat de NWD na al die jaren nog steeds een van de hoogtepunten op de wiskunde-agenda zou zijn. Hij antwoordde dat het hem vooral verbaasde dat er aan het concept niets is veranderd. Dus met funrum, spelletjes, muziek etcetera. Het is inderdaad grappig om het programma van de eerste editie er eens op na te slaan. Er werd zelfs een bedrijf bedankt voor het ter beschikking stellen van *geavanceerde MS-DOS machines...*
Op vrijdagavond was er een uniek eenmalig gezamenlijk optreden van Ionica Smeets en Jan Beuving. Voor de verliezers van de loterij: daar vond de première van de Hoekstreep uit deze editie plaats, dus die inhaalslag ga je in ieder geval maken. Morgen staat de zon weer loodrecht boven de evenaar: het begin van de astronomische lente. Geniet ervan!

Tom Goris

TOEVAL EN GOKKEN

Piet van Blokland

Onze intuïtie laat ons vaak in de steek bij redeneren over kans en toeval. Simulaties helpen leerlingen om meer grip te krijgen op de begrippen kans en toeval. Veel van de misverstanden bij gokkers zie je ook bij leerlingen. Gokken is voor veel leerlingen geen ver-van-mijn-bed-show meer. Piet van Blokland beschrijft een lessenserie die hij heeft ontwikkeld en die leerlingen laat inzien dat gokken niet verstandig is.

Inleiding

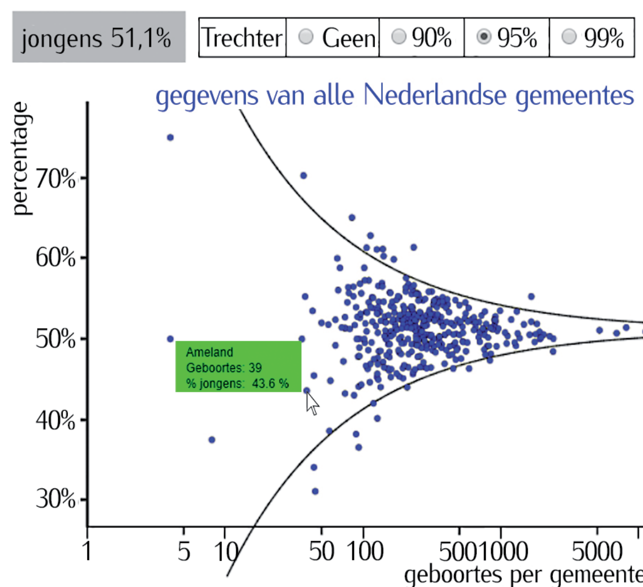
In de lessenserie *Toeval en gokken* wordt veel gebruik gemaakt van simulaties om de rol van toeval te ervaren. Simulaties helpen leerlingen gevoel voor kansen te ontwikkelen. Het is veel gemakkelijker voor de leerlingen om uit te leggen wat er gebeurt in percentages van de gevallen dan in termen van kansrekening.
De bruto-omzet van de gokindustrie in Nederland is 1,42 miljard per jaar (2016). In Amsterdam alleen al zijn er nu 19 gokhallen en casino's. De schatting is dat 1 tot 5% van de spelers zich ontwikkelt tot probleemgokker. Binnenkort is gokken op internet in Nederland toegestaan.
In dit artikel volgt een bespreking van voorbeelden uit het lesmateriaal. De apps en het lesmateriaal zijn beschikbaar op Vustat.[1] In de eerste lessen wordt vooral aandacht besteed aan de begrippen kans en toeval. Bij de gokkast wordt onderzocht hoe groot de kans is dat je in één uur €100 verliest en hoe groot de kans is dat je in één uur €100 wint. In de app kan ook gemanipuleerd worden met verslavende elementen in de gokkast. Ook bij roulette wordt gekeken naar de kans op winst op korte en lange termijn. Ook hier is er aandacht voor gebruik van misconcepties bij spelers en voor suggesties van winnende strategieën. Naast het simuleren is er in de lessenserie ook aandacht voor de psychologische en maatschappelijke kant van gokverslaving.

Magisch denken

Bestaat toeval? is een belangrijke vraag voor leerlingen. Andere vragen als: *Wat is toeval eigenlijk?* en *Wat is determinisme?* verdienen het om aan te orde te worden gesteld. Dat iets toevallig is, wil nog niet zeggen dat je er niets over kunt zeggen. Een voorbeeld van magisch denken is 'Als ik in deze hoek van de roulettetafel speel, dan ga ik winnen, net zoals de vorige keer.' Een andere vorm van magisch denken is de '*gambler's fallacy*': na tien keer rood wordt de kans op rood groter / kleiner. Een opdracht aan de leerlingen zou kunnen zijn: vraag of je ouders iets heel bijzonders hebben meegemaakt. Bijvoorbeeld of ze ooit een bekende onverwacht op vakantie hebben ontmoet. Uiteraard moet je natuurlijk wel uitleggen waarom je dat vraagt! En tijdens het klassengesprek erna kun je proberen duidelijk te krijgen, hoe je kunt verklaren dat zoveel ouders iets bijzonder hebben meegemaakt.

De wet van grote en kleine aantallen

Het is niet gemakkelijk om voorbeelden van alleen-maar-toeval in de natuur te vinden. De kans op een jongen of meisje bij de geboorte lijkt er een te zijn die gemakkelijk te begrijpen is. In de grafiek in figuur 1 staat op de x-as het aantal geboortes in de gemeentes van Nederland en op de y-as het percentage jongens. Deze grafiek demonstreert de wet van kleine en grote aantallen. Bij kleine aantallen inwoners is er veel spreiding en bij grote aantallen weinig spreiding.



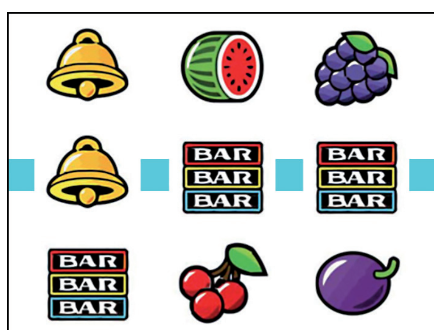
figuur 1 Illustratie van de wet van kleine en grote aantallen

Door met de muis over een bolletje heen te gaan verschijnen de gegevens van de bijbehorende gemeente. Vragen die je naar aanleiding van deze grafiek kunt stellen zijn bijvoorbeeld:

- Deze grafiek is van het jaar 2015. Hoe zou de grafiek van 2018 eruit zien? (Dit is een voorbeeld van intuïtieve inferentiële statistiek).
- Is het mogelijk dat volgend jaar in de gemeente Ameland geen jongens worden geboren? In 2015 waren er 39 kinderen geboren. Is het waarschijnlijk?

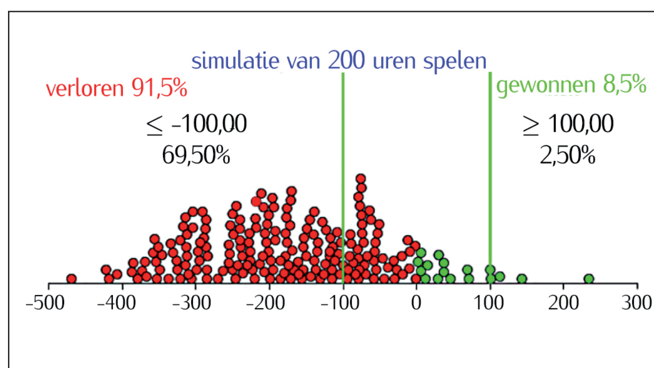
Het doel van deze opgave is om te ervaren dat de wet van de grote aantallen echt bestaat en dat daar op teruggegrepen kan worden bij de winstverwachting bij het gokken. Natuurlijk spelen ook de begrippen gemiddelde en spreiding in deze context een rol.

Gokkast



figuur 2 Gokkast

Je wint als je een bepaalde volgorde van plaatjes hebt, zie figuur 2. Meestal bij drie dezelfde plaatjes in de middelste rij. Gokkasten zijn de grootste inkomstenbron van de gokindustrie geworden. Talloze aanpassingen van de gokmachine met onder andere geluid- en lichteffecten hebben de gokmachine steeds verslavender gemaakt.[2]
Het uitkeringspercentage (= totaal uitkeringen / inleg) van een gokkast is ongeveer 80%. In de app is het gemakkelijk om verloop van inzet en uitkeringen bij te houden en kan het ook supersnel gespeeld worden, zonder dat het geld kost.
Het duurt soms heel lang totdat het waargenomen percentage van de uitkeringen in de buurt ligt van het verwachte percentage. Het kan enige duizenden spelletjes duren totdat dit verschil kleiner is dan een paar procent.
Een extra toevoeging aan deze app is de berekening van de kosten per uur spelen, zie figuur 3. De variatie van de kosten per uur spelen is groot. De leerlingen kunnen gemakkelijk zien dat de kans op het winnen van meer dan €100 per uur ongeveer 2% is, terwijl de kans op meer dan €100 verliezen ongeveer 70 % is. Hopelijk vinden zij deze cijfers niet aantrekkelijk en willen ze niet alleen de volgende keer nadenken over de volgende gok, maar over een langere periode en dan kiezen voor een rationelere aanpak.

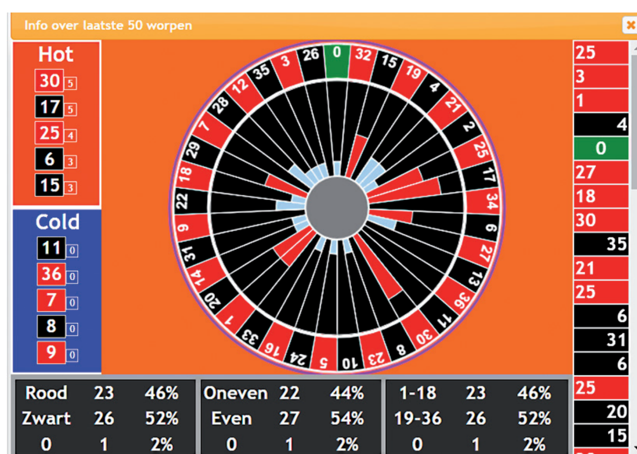


figuur 3 Winsten van 200 keer één uur spelen met een gokkast

Als je drie *bars* op een rij hebt, wordt een grote prijs uitgekeerd. Als je twee *bars* op een rij hebt, en de derde *bar* net niet dan ontstaat grote druk op de speler om door te gaan. De machine staat immers op het punt om uit te gaan keren. Dit is een hele normale menselijke reactie. Immers je bent er bijna. Natuurlijk is het eenvoudig om dit in de machine zo te ontwerpen dat extra *near-misses* getoond worden. Ook in de app kunnen leerlingen dit instellen en aanpassen.

Roulette

Tien spelers, ieder met een startbedrag van €300 en een inzet van €10, spelen roulette. Iedere speler kan op dezelfde getallen spelen en krijgt dezelfde bedragen uitgekeerd als in het officiële roulette. Zodra het spel start, winnen sommige spelers en verliezen anderen. Sommigen gaan heel snel failliet. Sommigen blijven heel lang levend, maar op de lange duur ...
In het Holland Casino hangen veel grote schermen om te laten zien wat de afgelopen vijftig keer gespeeld is. Natuurlijk met de suggestie dat je deze kennis kunt gebruiken om te winnen. De vraag aan de leerlingen is of de speler iets kan met deze informatie. Duidelijk is dat het casino gebruik probeert te maken van bekende misverstanden bij gokkers, de *gambler's fallacy*.



figuur 4 Overzicht van de laatste vijftig roulette worpen

De volgende optie is om het spel heel vaak te spelen (bijvoorbeeld 200 keer 2500 spellen) en dan naar de resultaten in de grafiek te kijken. Ondanks grote fluctuaties verlies je op de lange duur 2,7% van je inzet. Ook de verdubbelingstrategie kun je naspelen. Je begint met 1 euro, als je verliest zet je 2 euro in. Als je wint heb je 1 euro gewonnen. Als je verliest speel je de volgende keer met 4 euro enzovoorts. Als je de verdubbelingsstrategie simuleert, dan verlies je ook gemiddeld 2,7% van je totale inzet. Veel websites suggereren dat de verdubbelingsstrategie een winnende strategie is. Google maar eens op roulette en strategie.

Gokverslaving

In deze lessen wordt een aantal keren de gokproblematiek aangekaart,[3] maar het is aan de school of en wanneer de docent daar dieper op ingaat. Er is wel ondersteunend materiaal beschikbaar dat ingaat op de theorie van Skinner en Pavlov. Ook is er aandacht voor het onderzoek van Schüll[2] waarin zij aantoont dat voor de zwaar verslaafde het eigenlijk niet meer gaat om winst of verlies, maar om 'verdoving'. Ik hoop dat een aantal scholen dit lesmateriaal wil uitproberen en hun bevindingen aan mij willen doorgeven, zodat het materiaal kan worden verbeterd.

Achtergrondinformatie bij de lessenserie:

vakbladeuclides.nl/945blokland

Noten

[1] Vustat-apps: zie www.vustat.eu. Voor het lesmateriaal moet je als taal Nederlands selecteren en kijken bij de optie Educatief materiaal.
[2] Natasha Dow Schüll (Mei 2014) Addiction by design Princeton University Press
[3] Zie ook: *https://www.jellinek.nl/informatie-over-alcohol-drugs/gokken/basisinfo-over-gokken/*

Bij de ontwikkeling van het lesmateriaal heeft Piet Blokland samengewerkt met SLICKS (ervaringsdeskundig expertisecentrum kansspelen). Zie *www.slicks.info.*
Op de site vind je het lesmateriaal.
https://www.vustat.eu/apps/lessen/les.html

Over de auteur

Piet van Blokland is gepensioneerd wiskundeleraar. Hij heeft jarenlang op de lerarenopleiding gewerkt en lesgegeven aan eerste- en tweedejaars economiestudenten. Met Carel van de Giessen samen heeft hij het programma VUStat ontwikkeld. Nu is hij nog steeds actief met het ontwikkelen van apps, zie www.vustat.eu.
E-mailadres: pjvanblokland@gmail.com

VIJF VRAGEN AAN...



In de rubriek Vijf vragen aan ... leren we docenten wiskunde beter kennen. Waarom hebben ze voor het vak gekozen? Wat inspireert hen? Hebben ze nog tips voor collega's? Deze keer vijf vragen aan Bert Boon.

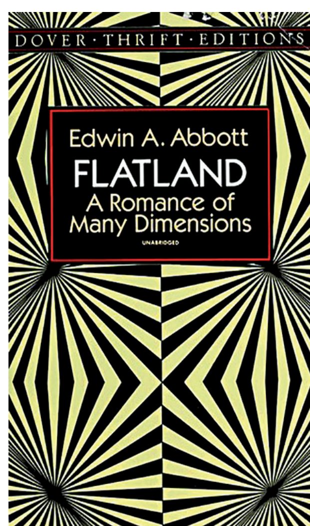
Bert Boon

1 Wie heeft of hebben de meeste invloed gehad op jouw keuze van een loopbaan in het wiskundeonderwijs?

'Toen ik een jaar of negen was, kwam er in de buurt een nieuw gezin wonen. Op het naambordje stond: professor..., de naam ben ik vergeten. Het bleek een professor in het goochelen te zijn. Toen mijn juffrouw, die mijn passie voor rekenen deelde, vroeg wat ik wilde worden zei ik direct: professor in het rekenen. Op het gymnasium stond voor mij al vast dat ik in elk geval leraar wilde worden. Mijn beste vak was wiskunde, dus leraar wiskunde. Al op school was ik druk bezig klasgenoten te helpen met wiskunde. De cursussen over het werken in groepen van het CPS hebben veel invloed gehad op mijn manier van lesgeven.'

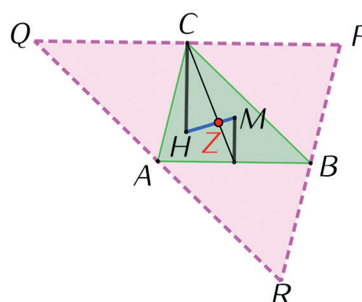
2 Welk verhalend boek over wiskunde zou jij collega's aanraden te lezen?

'Een van de leukste boeken vind ik nog steeds *Flatland* van Edwin A. Abbott waarin we kennis maken met de bewoners van een tweedimensionale wereld. In het tweede deel komt lijnland aan de orde en als hoogtepunt de vierdimensionale ruimte.
Daarnaast is zeker voor de leerlingenbibliotheek de *Telduivel* van Hans Magnus Enzensberger een aanrader.



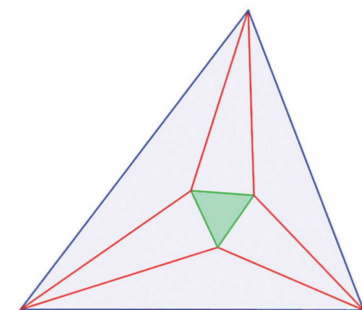
3 Welke meetkundige stelling heeft voor jou schoonheid en verrassing?

Tijdens mijn schooltijd fascineerde de rechte van Euler mij. Als docent vond ik een eenregelig bewijs. Dan hindert het niet dat je datzelfde bewijs later terug vindt in de *Vlakke Meetkunde* van Molenbroek. Dat euforische moment neemt niemand je af.



figuur 1

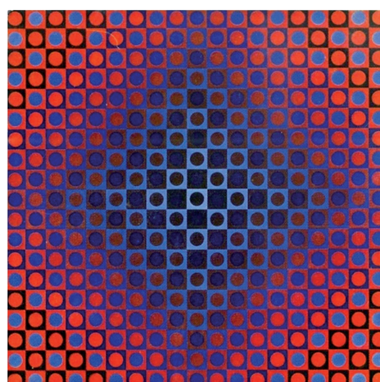
ΔPQR is het beeld van ΔABC bij een vermenigvuldiging ten opzichte van Z met factor –2. Daar bij is H het beeld van M. De hoogtelijnen van ΔABC zijn de middelloodlijnen van ΔPQR.



figuur 2 De stelling van Morley

Ook de stelling van Morley, die zegt dat de trisectrices van een driehoek een gelijkzijdige driehoek insluiten, is van een verrassende schoonheid. Helaas heb ik daar nog nergens zo'n eenvoudig bewijs voor kunnen vinden.

? 4 Welk kunstwerk moet volgens jou door elke wiskundeleraar gezien worden?
'Kunst is toch vaak een kwestie van smaak, maar geen wiskundeleraar kan natuurlijk om Escher heen. Zelf ben ik ook een fan van de Op-Art van de Hongaar Victor Vasarely, van wie deze reproductie op mijn werkkamer hangt.'



Schilderij van Victor Vasarely

? 5 Welk advies geef jij je collega's?
'Op een zeker moment vertelde een vierdeklasser mij dat hij had uitgevonden dat het verschil van twee kwadraten van opeenvolgende getallen steeds gelijk was aan de som van die getallen. Geweldig! Deel in de euforie. Anderzijds: heb vooral aandacht voor die leerlingen die ons prachtige vak moeilijk vinden. De eerste voldoende is voor zo'n leerling even belangrijk als een wiskundige 'vondst' voor een liefhebber.
De negens en tienen kunnen het ook zonder jou, de vijven en zessen hebben jouw steun en motivatie hard nodig.'

Over de auteur

Bert Boon was 40 jaar docent wiskunde aan het Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag.
E-mailadres: *aw.boon@casema.nl*

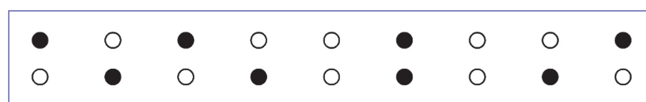
RIJTJES MET WITTE EN ZWARTE BALLEN II

Rob Bosch

Wiskunde, gewoon omdat het mooi is. Rob Bosch bedrijft wiskunde met witte en zwarte ballen en schrijft daar een serie miniaturen over.

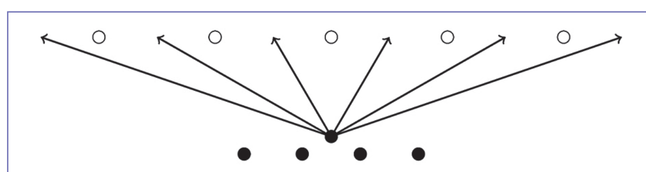


In de *Euclides 94-3* hebben we in deze rubriek afgeleid dat het totaal aantal rijtjes met witte en zwarte ballen waarin geen opeenvolgende zwarte ballen voorkomen een Fibonaccigetal is. We hebben gezien dat je met n ballen F_{n+2} van zulke rijtjes kunt maken, waarbij F_{n+2} het $n + 2$-de getal in de rij van Fibonacci is. De vraag hoeveel van deze rijtjes er zijn met een gegeven aantal zwarte ballen is in dat stukje niet beantwoord, daar gaan we nu op in. We kunnen weer een relatie afleiden voor het aantal rijtjes van n ballen waarvan er k zwart zijn. Maar omdat in zo'n relatie zowel de parameters k als n voorkomen, is het lastig te zien waartoe die relatie leidt.[1]
We gooien het daarom over een andere boeg.
We maken een rijtje van a witte en b zwarte ballen waarin geen twee opeenvolgende zwarte ballen voorkomen. Voor $a = 5$ en $b = 4$ zijn de volgende rijtjes, zie figuur 1, dus toegestaan.



figuur 1

Om het aantal rijtjes zonder opeenvolgende zwarte ballen te bepalen, leggen we de vijf witte ballen op een rij. Daarna plaatsen we de vier zwarte ballen. Omdat we niet twee zwarte ballen tussen de witte ballen mogen plaatsen, blijven er $6 = 5 + 1$ plaatsen over voor de zwarte ballen, zie figuur 2.



figuur 2

Het aantal mogelijkheden om vier posities voor de zwarte ballen te kiezen uit de zes mogelijke plaatsen is

$$\binom{6}{4} = 15.$$

Er zijn dus vijftien rijtjes zonder opeenvolgende zwarte ballen.
In het algemene geval van a witte en b zwarte ballen, leggen we de a witte ballen weer op een rij. Voor de b zwarte ballen hebben we dan $a + 1$ mogelijke posities. Het aantal mogelijke rijtjes is dan

$$\binom{a+1}{b}.$$

Merk op dat voor $b > a + 1$ het aantal rijtjes uiteraard gelijk is aan 0. Een alternatieve formulering van het bovenstaande balletjesprobleem is: van n balletjes zijn er k zwart, hoeveel rijtjes zijn er zonder twee opeenvolgende zwarte ballen.
Als er k zwarte ballen zijn dan blijven er $n - k$ witte ballen over dus het aantal rijtjes is dan

$$\binom{n-k+1}{k}$$

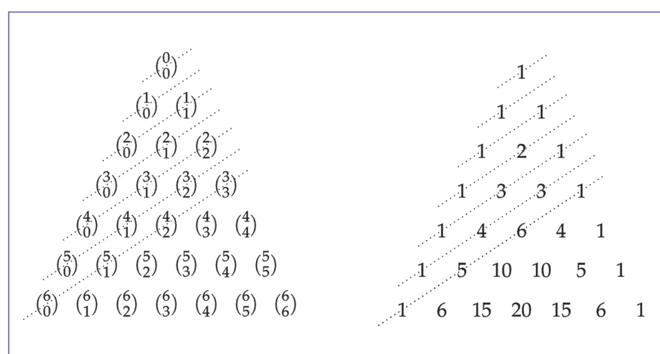
Het totaal aantal rijtjes met n witte en zwarte ballen is uiteraard gelijk aan de som van de bovenstaande binomiaalcöefficïenten met $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \ldots + \ldots$$

Zoals in de inleiding gezegd, hebben we in de vorige aflevering afgeleid dat het totaal aantal rijtjes gelijk is aan het Fibonaccigetal F_{n+2}. We vinden zo de volgende bijzondere relatie:

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \ldots + \ldots = F_{n+2}$$

Deze identiteit vinden we in de driehoek van Pascal terug als de som van de getallen op een diagonaal, zie figuur 3.



figuur 3

Als we in de eerste figuur de negen ballen in de twee rijtjes nummeren van 1 t/m 9 dan corresponderen de zwarte ballen met deelverzamelingen van vier elementen uit negen zonder opeenvolgende getallen. Bij de twee rijtjes horen dan de deelverzamelingen D1 = {1, 3, 6, 9} en D2 = {2, 4, 6, 8}. Omgekeerd hoort bij iedere deelverzameling van vier elementen uit negen zonder opeenvolgende getallen een rijtje van vijf witte en vier zwarte ballen. De deelverzameling {1, 3, 6, 9} kunnen we voorstellen als het rijtje van figuur 4.



figuur 4

Het aantal deelverzamelingen met vier elementen zonder opeenvolgende getallen uit een verzameling met negen elementen is derhalve gelijk aan:

$$\binom{6}{4} = 15$$

De hier boven geschetste één-één-correspondentie geldt, zoals je eenvoudig nagaat, algemeen. Het aantal deelverzamelingen van $N_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ met k elementen zonder opeenvolgende getallen is gelijk aan:

$$\binom{n-k+1}{k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Merk op dat dit ook geldt voor $k = 0$ want er is één deelverzameling met 0 elementen, namelijk de lege verzameling en deze bevat uiteraard geen opeenvolgende getallen. QED.

In de Lotto worden uit 45 genummerde balletjes (1 t/m 45) zes balletjes getrokken. Als je deze zes balletjes (getallen) goed voorspelt, dan win je de jackpot. Veel deelnemers zijn geneigd om de zes getallen min of meer uniform te verdelen over de 45 getallen. In een eigen experiment onder 100 studenten bleken slechts twaalf studenten twee of meer opeenvolgende getallen te kiezen. Blijkbaar omdat men meent dat een dergelijk rijtje zeldzaam is. Wel, het totaal aantal rijtjes van zes

ballen is $\binom{45}{6} = 8.145.060$ terwijl het aantal rijtjes

zonder opeenvolgende getallen gelijk is aan

$\binom{45-6+1}{6} = \binom{40}{6} = 3.838.380$. De kans op een

trekking met (minstens) twee opeenvolgende getallen is $\approx 0{,}53$. Dus toch maar eens een rijtje met opeenvolgende getallen proberen?

Over de auteur

Rob Bosch was universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie en lid van de redactie van Euclides.
E-mailadres: *dr.robbert.bosch@gmail.com*

NIEUW

TI-Nspire™ CX Ecosysteem

Een compleet systeem met nieuwe grafische rekenmachines die ideaal zijn voor onderzoekend leren. De handhelds zijn te koppelen aan andere apparaten. Verzamel gegevens, doe simulaties en maak van ieder klaslokaal een onderzoekslab!

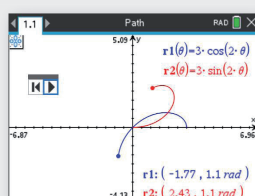




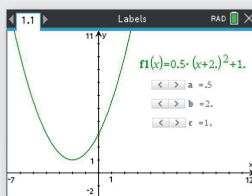
EXAMENSTAND

De nieuwe TI-Nspire™ CX II-T en TI-Nspire™ CX II CAS calculators hebben een Nederlandse examenstand en zijn toegestaan bij de examens havo en vwo.

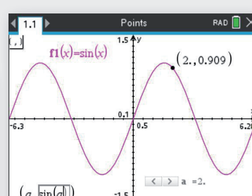
Start met **nieuwe mogelijkheden** om te leren



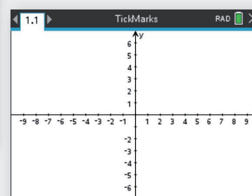
Geanimeerde grafieken



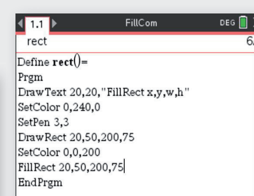
Dynamische parameters



Punten via coördinaten



Labels op de coördinaatassen



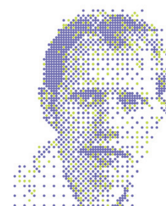
Grafisch programmeren met TI-Basic

Op de hoogte blijven van nieuwe ontwikkelingen? Meld aan voor onze nieuwsbrief! **ti-education-news.com/nieuwsbrief**

Texas Instruments

DE HOEKSTREEP

ALARM



Jan Beuving

In mijn studententijd ben ik een jaar bestuurslid geweest van A-Eskwadraat, de studievereniging voor Wiskunde, Natuurkunde, Informatica en Informatiekunde aan de Universiteit Utrecht. Je moest in die tijd ook heel wat borrels af bij zusterverenigingen, en zo belandden wij op zeker moment in een chic, monumentaal gebouw in de Utrechtse binnenstad.

We waren natuurlijk gekomen voor de goede contacten, maar het bier was ook gratis, en als nerds werden we binnen ook nog eens getrakteerd op een vrolijk combinatorisch probleem. Ons oog viel namelijk op het kastje van de alarminstallatie dat binnen naast de deur hing. Op dit kastje van Lips waren de 1, 6 en 8 volledig weggesleten, alsmede de enter-toets. De andere cijfers waren nog puntgaaf. Uitgaande van een code van vier cijfers waren we nu heel wat van de 10.000 mogelijkheden kwijt! Toch leuk als we nog eens wilden inbreken.

Wij lachten natuurlijk, en achter op de bierviltjes rekenden we uit hoeveel opties er nog over waren. Dit is ook een leuk probleem voor in de klas. We constateerden eerst dat als er maar één cijfer uitgesleten was geweest (naast de enter), er natuurlijk maar één mogelijkheid was geweest: aaaa. Ook als er vier verschillende cijfers waren weggevaagd, was het een eenvoudig probleem: dan waren er natuurlijk $4! = 24$ mogelijkheden.
Het geval van twee cijfers (zeg *a* en *b*) is al iets moeilijker. Je ervaring roept misschien meteen 16, immers: je hebt voor iedere plek twee opties. Maar, dan heb je er twee te veel: *aaaa* en *bbbb* kunnen niet meedoen, want dan zou de *b* respectievelijk de *a* niet weggesleten zijn. Hier gaat het om veertien mogelijkheden dus. (Zo slim waren we op de borrel niet: daar schreven we gewoon alle opties uit - dat maakt het ook leuk voor in de klas, dat het ook door consequent schrijven is in te zien: *aaab, aaba, abaa, baaa, bbba, bbab, babb, abbb, aabb, abab, baab, bbaa, baba, abba.)* Dan het geval met drie cijfers.

Gezien de reeks 1 – 14 - ? - 24 verwachtten we een getal rond de 18 op het vraagteken. Maar nu komt het: het aantal opties is 36! (Sorry, niet 36 faculteit, dit was een uitroepteken van verbazing.) Dat aantal is zo hoog omdat je niet weet welk getal er twee keer wordt gebruikt. Stel je hebt twee keer 6, één keer 1 en één keer 8, dan zijn de opties 6618, 6681, 6186, 6168, 6816, 6861, 1668, 1686, 1866, 8661, 8616 en 8166. Dat zijn er 12, en dus heb je er nog 24 voor de gevallen waarin 1 en 8 twee keer voorkomen.

> 'DENK JE ALS DIEF IN DE NACHT GELUK TE HEBBEN, HEB JE WISKUNDIG TOCH DE GROOTSTE PECH!'

Een verrassende uitkomst, vonden wij! Denk je als dief in de nacht geluk te hebben, heb je wiskundig toch de grootste pech! Maar het meest verrassende komt nog: toen we tamelijk aangeschoten huiswaarts gingen, de bierviltjes vol getallen achterlatend, wisten we toch precies welke van die 36 de goede code was! Op de gevel van het pand stond namelijk breeduit: ANNO 1681.

Over de auteur

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier. Hij toert door het land met zijn nieuwe voorstelling Rotatie.
Kijk voor de speellijst op www.janbeuving.nl.

WORTELS VAN DE WISKUNDE

13: LOGARITMEN

Jeanine Daems

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek[1], de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: de logaritme.



Logaritme nu

De logaritme is een lastig onderwerp voor veel leerlingen. Ze wordt op een nogal abstracte manier geïntroduceerd: als het getal wat je bij een gegeven grondtal in de exponent moet zetten om een bepaalde uitkomst te krijgen. In functietermen: een logaritme is de inverse van een exponentiële functie. In figuur 1 zie je hoe de logaritme gedefinieerd wordt in *Getal & Ruimte.*

9.1 Logaritmen

0 1 Vul in.

a $2^{\cdots} = 8$ **c** $2^{\cdots} = \sqrt{2}$ **e** $3^{\cdots} = \frac{1}{27}$

b $2^{\cdots} = \frac{1}{4}$ **d** $3^{\cdots} = 9$ **f** $3^{\cdots} = \sqrt[5]{3}$

Theorie A De logaritme

In opgave 1a heb je in moeten vullen tot welke macht je 2 moet verheffen om 8 te krijgen. Voor deze opdracht bestaat de notatie $^2\log(8)$.

- De notatie log komt van **logaritme**.
- In $^2\log(8)$ is 2 het **grondtal van de logaritme**.
- $^2\log(8)$ spreek je uit als de tweede logaritme van 8 of kortweg 2 log 8.

$^2\log(8)$ is de exponent van het grondtal 2 waarmee de macht gelijk is aan 8. Deze exponent is 3, dus $^2\log(8) = 3$.
En zo is $^3\log\left(\frac{1}{81}\right)$ gelijk aan −4, want $\frac{1}{81}$ is 3^{-4}.

$^3\log\left(\frac{1}{81}\right)$ is de exponent van het grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan $\frac{1}{81}$.

$^g\log(x)$ is de exponent van het grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x.
In $^g\log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Zoek je de uitkomst van $^3\log(3^4)$ dan is het antwoord natuurlijk 4.
Dus zoek je de uitkomst van $^3\log(81)$, dan bedenk je dat $81 = 3^4$, dus $^3\log(81) = {^3\log(3^4)} = 4$.
En zo is $^3\log(9\sqrt{3}) = {^3\log(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}})} = {^3\log(3^{2\frac{1}{2}})} = 2\frac{1}{2}$.

$^g\log(g^a) = a$

figuur 1 *Getal & Ruimte*, vwo B deel 3 (11e editie)

Wat mij opvalt is dat de logaritme hier een 'opdracht' wordt genoemd, en niet een functie. In *Moderne Wiskunde* lijkt de aanpak hierop, al is het daar de 'oplossing' van de vergelijking $g^x = a$. De *Wageningse Methode* doet dat ook en formuleert het als volgt, zie figuur 2.

Tegenwoordig is de logaritme een bijzonder soort functie, vooral nuttig bij het primitiveren, en exponentiële functies zijn belangrijk in allerlei modellen dus is de inverse functie ook best handig.



De exacte oplossing van de vergelijking $2^t = 6$ noemen we $^2\log(6)$ en die van $5^t = 10$ noemen we $^5\log(10)$.

figuur 2 *Wageningse Methode,* 4V wiskunde B (2015)

Toch is mijn ervaring dat veel leerlingen het nut van de logaritme niet ervaren. Ze is abstract, je moet goed onthouden wat er nou precies wordt omgedraaid, de rekenregels voelen voor leerlingen niet logisch en geven geen houvast. Het is een omgekeerde bewerking bij exponentiële berekeningen, net zoals breuken bij vermenigvuldigen en wortels bij machtsverheffen, en net als bij die onderwerpen speelt ook hier de proces-objectdualiteit een rol: een logaritme heeft aan de ene kant een proceskarakter, het is een opdracht (letterlijk zelfs, in *Getal & Ruimte*), maar tegelijkertijd is het ook een object op zich waar je weer mee kunt werken en waar rekenregels voor gelden. En dan is het ook nog een functie waar je een grafiek bij kunt tekenen.
Wat meer kennis van de geschiedenis kan het nut van de logaritme wat voelbaarder maken, waardoor de leerling ook de belangrijkste rekenregel misschien wat beter kan onthouden.

Logaritme toen

De logaritme is helemaal niet bedacht als inverse van een exponentiële functie. Logaritmen werden uitgevonden door o.a. de Schot John Napier aan het begin van de zeventiende eeuw. In die tijd bestonden het functiebegrip en de grafiek nog niet eens, laat staan het begrip inverse functie; ook e en e^x waren er nog niet. Waardoor kwam hij dan toch met die logaritme?
Een van de grootste problemen in de wetenschap in die tijd was de grote hoeveelheid rekenwerk die verzet moest worden. In onze tijd van computers kun je het je nauwelijks meer voorstellen, maar al die berekeningen, vaak met grote getallen, moesten met de hand. In de sterrenkunde werden de metingen steeds nauwkeuriger,

dus de berekeningen moesten met steeds grotere getallen. Die berekeningen gingen ook vaak over sinussen, en de sinussen in de sinustabellen bestonden uit wel negen cijfers (de sinus was toen nog de lengte van een lijnstuk en niet een getal tussen 0 en 1, dus voor zo'n sinustabel nam men een cirkel met een zeer grote straal om breuken te vermijden). Denk maar eens aan het cijferend rekenen: optellen en aftrekken gaat nog wel, maar bij grote getallen, van negen cijfers, is vermenigvuldigen wel erg veel werk en is de kans op fouten groot.
Napier zelf schrijft daarover in het voorwoord van zijn boek *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614):

Since nothing is more tedious, fellow mathematicians, in the practice of the mathematical arts, than the great delays suffered in the tedium of lengthy multiplications and divisions, the finding of ratios, and in the extraction of square and cube roots - and in which not only is there the time delay to be considered, but also the annoyance of the many slippery errors that can arise: I had therefore been turning over in my mind, by what sure and expeditious art, I might be able to improve upon these said difficulties. In the end after much thought, finally I have found an amazing way of shortening the proceedings, ...[2]

En dat is de reden voor het ontstaan van de logaritme. Napier werd waarschijnlijk geïnspireerd door het rijtje in Michael Stifels *Arithmetica Integra* uit 1544, zie figuur 3.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

figuur 3 Uit: Michael Stifels (1544). *Arithmetica Integra*

Stifel legde daarbij uit dat vermenigvuldigen in het onderste rijtje correspondeerde met optellen in het bovenste rijtje, en delen in het onderste met aftrekken in het bovenste. Om 1/8 en 64 te vermenigvuldigen aan de onderkant, wat natuurlijk 8 gaat worden, tel je aan de bovenkant het aantal factoren twee op: $-3 + 6 = 3$, en dat staat inderdaad boven 8.
Op dat principe berustte Napiers logaritmeconcept. In 1614 verscheen zijn eerste boek hierover. Henry Briggs[3] zag dat boek en samen met Napier heeft hij het logaritmeconcept verbeterd. Ze werden het er over eens dat het beter zou zijn om de logaritme van 1 gelijk aan 0 te kiezen. Briggs stelde de logaritme van 10 gelijk aan 10^{14}, want hij rekende met gehele getallen en wilde een tabel op 14 cijfers nauwkeurig. Toen men eenmaal gewend was aan kommagetallen werd het gebruikelijk om $\log(10) = 1$ te gebruiken. Briggs besteedde veel tijd aan het berekenen van de nieuwe tabellen. Onafhankelijk ontdekte ook de Zwitserse Joost Bürgi het principe van de logaritme toen hij assistent was bij Kepler.
Napiers ideeën zijn wat ingewikkeld, maar uiteindelijk is het principe tamelijk eenvoudig: als je nou een zeer uitgebreide tabel hebt zoals hierboven, dan kun je vermenigvuldigingen veel sneller uitvoeren door een optelling te doen. Zie voorbeeld 1 verderop. Eigenlijk is de bekendste rekenregel voor de logaritme dus de reden dat hij uitgevonden is: $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
Je kunt ervoor kiezen de logaritme zo te introduceren bij leerlingen. Dus niet eerst de logaritme behandelen en dan de bronnen erbij halen om te laten zien waarom die logaritme bedacht is, maar andersom: beginnen bij de bronnen en deze rekenregel, en daarna de moderne benadering. Bijna alle andere rekenregels voor de logaritme kun je bewijzen uit deze ene, alleen is $r \cdot \log(a) = \log(a^r)$ voor irrationale getallen r wat lastig.[4]

Tabellen van De Decker

In Nederland gingen Ezechiel de Decker en Adriaen Vlacq met het onderwerp aan de slag. Samen publiceerden zij in 1626 het *Eerste deel van de nieuwe telkonst* [5], wat nog niet over de logaritmen gaat. Dat is een vertaling van een werk van Napier over zijn rekenstokjes, aangevuld met voorbeelden uit de handel van De Decker. Volgens de titelpagina kwam de wiskundige inhoud van De Decker, die rekenmeester was in Gouda, en is de vertaling gemaakt door Vlacq. Hun *Tweede deel van de nieuwe telkonst* ging wel over de logaritme en verscheen in 1627, maar daar is slechts één exemplaar van bewaard gebleven. De logaritmetabel is in 1628 wel opnieuw uitgegeven zoals we hierna zullen zien.
Tussendoor publiceerde De Decker zonder Vlacq nog een mooie bron die leuk is om te bekijken, omdat deze in het Nederlands is geschreven: *Nieuwe telkonst, inhoudende de logarithmi voor de ghetallen beginnende van 1 tot 10000, ghemaeckt van Henrico Briggio professor van de geometrie tot Ocxfort.*[6] Dat boek bestaat voor het grootste deel uit een logaritmetabel, voortbouwend op het werk van Briggs. Het is niet de complete tabel: Briggs was bezig met logaritmen tot 100.000. Bovendien hebben deze logaritmen minder cijfers dan die van Briggs, tien in plaats van veertien. Uit dit boek bekijken we enkele voorbeelden.

In figuur 4 zie je het begin van de logaritmetabel. Merk op dat er soms twee komma's in een getal staan. Dat zijn dus niet onze decimale komma's, die waren toen ook niet gebruikelijk. De komma's zijn voor het overzicht, net zoals wij soms puntjes in grote getallen plaatsen. De kolom met 'Differ.' erboven bevat, zoals je wel kunt zien, de verschillen tussen twee opeenvolgende logaritmen. Die verschillen werden gebruikt bij het (lineair) interpoleren:

6 | 30

N	Logarithmi	Differ.
1	0,00000,00000	
2	0,30102,99957	17609,12590
3	0,47712,12547	12493,87366
4	0,60205,99913	9691,00130
5	0,69897,00043	7918,12461
6	0,77815,12504	6694,67896
7	0,84509,80400	5799,19470
8	0,90308,99870	5115,25224
9	0,95424,25094	4575,74906
10	1,00000,00000	4139,26852
11	1,04139,26852	3778,85608
12	1,07918,12460	3476,21063
13	1,11394,33523	3218,46834
14	1,14612,80357	2996,32234
15	1,17609,12591	2802,87236
16	1,20411,99827	2632,89387
17	1,23044,89214	2482,35837
18	1,25527,25051	2348,10959
19	1,27875,36010	2227,63947
20	1,30102,99957	2118,92990
21	1,32221,92947	2020,33861
22	1,34242,26808	1930,51552
23	1,36172,78360	1848,34057
24	1,38021,12417	1772,87670
25	1,39794,00087	1703,33393
26	1,41497,33480	1639,04162
27	1,43136,37642	1579,42671
28	1,44715,80313	1523,99666
29	1,46239,79979	1472,32568
30	1,47712,12547	1424,04391

N	Logarithmi	Differ.
31	1,49136,16938	1378,82845
32	1,50514,99783	1336,39616
33	1,51851,39399	1296,49771
34	1,53147,89170	1258,91274
35	1,54406,80444	1223,44564
36	1,55630,25008	1189,92233
37	1,56820,17241	1158,18725
38	1,57978,35966	1128,10104
39	1,59106,46070	1099,53843
40	1,60205,99913	1072,38654
41	1,61278,38567	1046,54337
42	1,62324,92904	1021,91652
43	1,63346,84556	998,42209
44	1,64345,26765	975,98373
45	1,65321,25138	954,53179
46	1,66275,78317	934,00262
47	1,67209,78579	914,33795
48	1,68124,12374	895,48426
49	1,69019,60800	877,39243
50	1,69897,00043	860,01718
51	1,70757,01761	843,31675
52	1,71600,33436	827,25260
53	1,72427,58696	811,78902
54	1,73239,37598	796,89297
55	1,74036,26895	782,53375
56	1,74818,80270	768,68287
57	1,75587,48557	755,31379
58	1,76342,79936	742,40180
59	1,77085,20116	729,92388
60	1,77815,12504	717,85846

A 2 | 61

figuur 4 Logaritmetabel van De Decker

als je de logaritme van 5,3 wilde uitrekenen, nam je als benadering de logaritme van 5 plus 0,3 keer het verschil tussen de log van 5 en die van 6.

Voorbeeld 1: vermenigvuldigen

Dit voorbeeld, zie figuur 5, kun je eventueel zelfs voorleggen ter introductie aan een leerling die nog niet weet wat een logaritme is. Dat zou ik dan wel doen met de tabel erbij, zodat de leerling ook kan zien dat die getallen er echt staan. Want wat gebeurt hier? Hier wordt 43 met 76 vermenigvuldigd via de tabel. De logaritmen van 76 en 43 worden opgezocht, bij elkaar opgeteld, daar komt 3,51428 uit, en terugzoeken vanuit dat getal levert als uitkomst 3268 op.
Is dat echt sneller dan 43 keer 76 uitrekenen? Niet echt. Maar bij grote getallen van veel cijfers scheelt het wel veel.

VANDE MENIGHVVLDIGINGH.

DE Logarithmus van het Menighvuldighende ghetal, ende van het zijnde te Menighvuldigen t'ſamen vergadert zijnde, brenghen uyt de Logarithmus van het ghetal datmen begheert.

EXEMPEL.

Laet 76 werden vermenighvuldight met 43.
Soeckt de Logarithmi, de welcke overeen comen met die ghetallen : ghy ſult bevinden dat de Logar. van 76 is 1,88081, ende van 43 is 1,63347 welcke t'ſamen vergadert zijnde, maken 3,51428. Beſiet dan wat ghetal daer mede overeen komt, ghy ſult bevinden 3268, 'twelck is het getal datmen begheert.

figuur 5 Vermenigvuldigen met de logaritmetabel

Voorbeeld 2: worteltrekken

Bij deze bron kun je vragen: wat gebeurt hier? Uit 'Laet begeert worden de Vierkante Wortel van 9409' blijkt dat wel: we gaan worteltrekken. Volgens de tekst moeten we de helft van de logaritme nemen en dat gebeurt hier ook: de logaritme van 9409 wordt opgezocht in de tabel, dat is 3,97354. Daarvan wordt de helft genomen: 1,98677 en dat wordt weer teruggezocht in de tabel, dat blijkt de logaritme van 97 te zijn, zie figuur 6.

EXEMPEL VAN EEN VIERkante uyttreckingh.

LAET begeert worden de Vierkante Wortel van 9409.
Nadien 'tVierkant van een getal is het tweede in orden met gheduerighe evenreednicheyt voortghaende, ſalmen nemen de $\frac{1}{2}$ vande Logarithmus des voorgheſtelt ghetals.
Als de Logarith. van 9409 is 3,97354
De helft daer van comt 1,98677
'twelck is de Logar. van 97, zijnde de begeerde Vierkante Wortel.

figuur 6 Worteltrekken met de logaritmetabel

Je kunt laten narekenen dat het klopt, en een goede vraag is natuurlijk: waarom klopt dit dan? Waarom levert de helft van de logaritme de logaritme van de wortel op? Die vraag kun je op verschillende manieren benaderen: als je de rekenregels voor de logaritme al behandeld hebt, is het gewoon toepassen van $\log(\sqrt{n}) = \log(n^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log(n)$.
Je kunt het ook afleiden vanuit de rekenregel $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ door voor a en b de uitdrukking $\sqrt{n}$ in te vullen: $\log(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}) = \log(\sqrt{n}) + \log(\sqrt{n})$, oftewel: $\log(n) = 2\log(\sqrt{n})$.

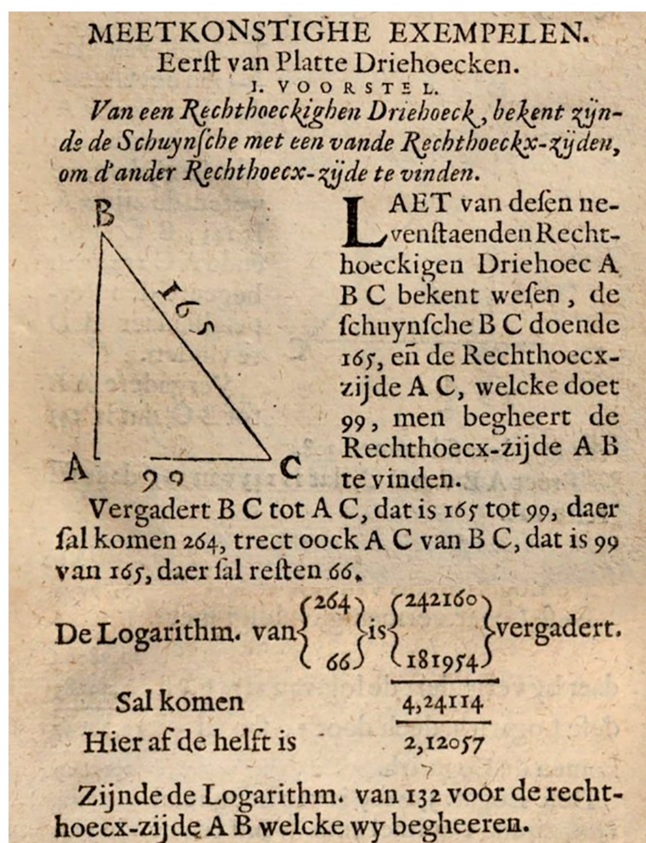
Maar het meest inzichtelijk is misschien wel terugkeren naar het rijtje dat de kern van de logaritmetabel vormt:

-2	-1	0	1	2	3	4	5
1/100	1/10	1	10	100	1000	10000	100000

Een goede vraag is dan: welk getal zou er onder het getal 1/2 in het bovenste rijtje moeten staan?
Of: hoe kun je nou met je rekenmachine heen en weer rekenen tussen de getallen in zo'n logaritmetabel? Als je dan eenmaal gezien hebt dat het getal x in de bovenste rij bij 10^x in de onderste rij hoort, kun je de rekenregels voor de machten gebruiken: log(9409) = 3,97354, oftewel $9409 = 10^{3{,}97354}$. Dan geldt dus dat $\sqrt{9409} = \sqrt{10^{3{,}97354}} = (10^{3{,}97354})^{1/2} = 10^{1/2 \cdot 3{,}97354}$.

Voorbeeld 3: Pythagoras

In figuur 7 zie je in één voorbeeld drie onderwerpen uit de schoolstof terugkomen.


MEETKONSTIGHE EXEMPELEN.
Eerſt van Platte Driehoecken.
I. VOORSTEL.

Van een Rechthoeckighen Driehoeck, bekent zijnde de Schuynſche met een vande Rechthoeckx-zijden, om d'ander Rechthoecx-zijde te vinden.

LAET van deſen nevenſtaenden Rechthoeckigen Driehoec A B C bekent weſen, de ſchuynſche B C doende 165, eñ de Rechthoecx-zijde A C, welcke doet 99, men begheert de Rechthoecx-zijde A B te vinden.

Vergadert B C tot A C, dat is 165 tot 99, daer ſal komen 264, trect oock A C van B C, dat is 99 van 165, daer ſal reſten 66.

De Logarithm. van {264, 66} is {242160, 181954} vergadert.

Sal komen 4,24114

Hier af de helft is 2,12057

Zijnde de Logarithm. van 132 voor de rechthoecx-zijde A B welcke wy begheeren.

figuur 7

Je kunt hierbij aan je leerlingen vragen: wat gebeurt hier eigenlijk? Waar komen die 264 en die 66 vandaan en waarom klopt het? Wat hier berekend wordt is in onze moderne notatie: ½(log(165 + 99) + log(165 – 99)), oftewel: $\log(\sqrt{(165+99)(165-99)}) = \log(\sqrt{165^2 - 99^2})$. Een oefening voor Pythagoras, rekenregels voor de logaritme en een merkwaardig product in één, dus.

Conclusie

In de bronnen die ik hierboven bekijk staat behoorlijk wat materiaal dat voor de leerlingen van nu herkenbare wiskunde is. Als je de logaritme introduceert als rekenhulpmiddel om een vermenigvuldiging om te zetten in een optelling, wordt duidelijk waarom de logaritme is ontwikkeld. En dan zal die rekenregel waarschijnlijk beter blijven hangen. Uit het laatste voorbeeld zie je ook hoe je dan toch de link met de exponentiële uitdrukkingen kunt leggen, zodat je daarna gewoon met de logaritme kunt gaan oefenen met behulp van de lesmethode.

Noten

[1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.Q. (2015). *Math through the ages, expanded 2nd edition.* Washington: MAA en Farmington: Oxton HousePublishers. Halverwege 2019 zal deze uitgebreide tweede editie verschijnen in Nederlandse vertaling bij Epsilon als de tweede, uitgebreide editie van *Wortels van de wiskunde*.

[2] Napier schreef dit boek in het Latijn, deze Engelse vertaling is uit Havil, J. (2014). *John Napier: Life, Logarithms, and Legacy.* Princeton: Princeton University Press, blz. 65

[3] Vertaling van Ian Bruce van het boek van Briggs: *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Briggs/index.html*

[4] Wepster, S. (2017). Logaritmen: hoe en waarom. *Pythagoras, jaargang*(57), nr. 1, pp. 12-15.

[5] Vlacq, A. (1628). *Arithmetica Logarithmica.* Gouda. Te vinden op: *https://books.google.nl/books?id=-XR-2oDEb9oC*

[6] Decker, E. de. (1626). *Nieuwe telkunst.* Gouda. Te vinden op: *https://play.google.com/books/reader?id=fqi_nclcw8gC&hl=en&pg=GBS.RA1-PA4*

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *jeanine.daems@hu.nl*

HET FIZIER GERICHT OP…

EEN DIGITALE REMIX VAN DATA EN KANS

Marianne van Dijke

In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut of de Freudenthal Group for research into the didactics of mathematics een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. 88% van de Nederlandse jongeren maakt dagelijks gebruik van WhatsApp. Is onze klas afwijkend? Met deze onderzoeksvraag gingen leerlingen uit vwo-3 aan de slag in het Teaching and Learning Lab (TLL) van de Universiteit Utrecht. Marianne van Dijke geeft een impressie.



Inleiding

Uit cijfers van onderzoeksbureau Newcom blijkt dat 88% van de Nederlandse jongeren tussen de 15 en 19 jaar dagelijks gebruik maakt van WhatsApp. Op de tweede plaats staat Snapchat met 55% en daarna volgen YouTube en Instagram, met respectievelijk 51% en 50%, zie figuur 1. Aan leerlingen de vraag: Hoe ziet het social-media-gebruik in de klas eruit en wijkt dit af van deze landelijke cijfers?



% dagelijks gebruik	15 - 19 jaar
	88%
	43%
	51%
	1%
	50%
	9%
	4%
	55%

figuur 1 Overzicht onderzoeksresultaten Newcom

Black box

Tijdens een vijf uur durende sessie in het TLL werkten leerlingen onder andere aan deze onderzoeksvraag. De leerlingen waren bekend met basisbegrippen uit de beschrijvende statistiek, maar onervaren met populatie en steekproef. Het eerste deel van de bijeenkomst bestond daarom uit de introductie van steekproef en steekproef-variatie aan de hand van de *black-box*-activiteit. In deze activiteit krijgen de leerlingen in twee- of drietallen een *black box* die gevuld is met duizend gele en oranje balletjes, zie figuur 2. Via een kijkvenster zijn twintig balletjes zichtbaar en leerlingen krijgen de taak om het aantal gele balletjes te schatten. Tijdens een klassikale uitwisseling van de schattingen komen statistische begrippen als (herhaalde) steekproef, populatie, omvang, variatie en kans aan bod. Door het herhalen van dit *black-box*-experiment met een groter kijkvenster van veertig balletjes maken leerlingen kennis met het effect van steekproef-omvang op de schatting van de populatie.

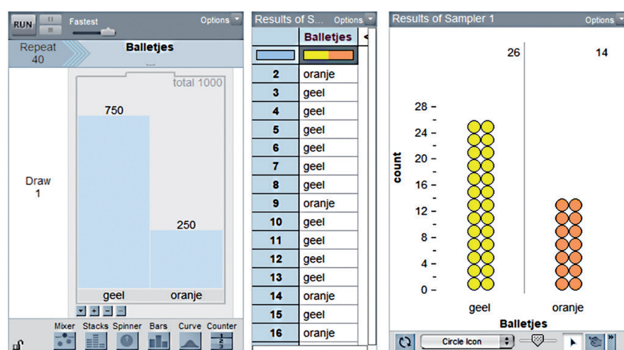


figuur 2 *Black box* met balletjes

Populatiemodel

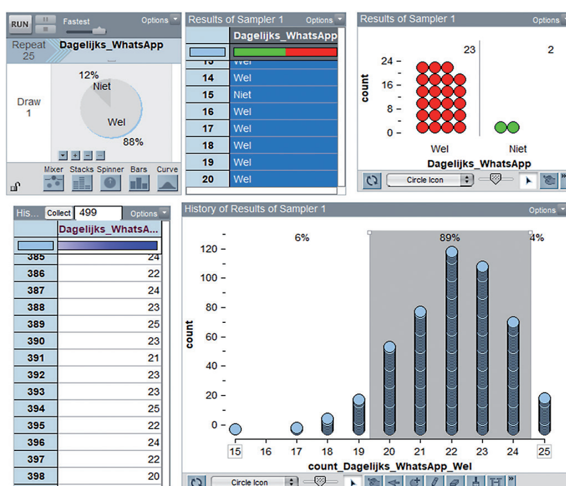
Na deze introductie stapten leerlingen over naar de digitale omgeving *TinkerPlots*. In deze tool kan eenvoudig een populatiemodel worden ingevoerd waaruit je steek-proeven kunt nemen. Elke steekproef wordt automatisch weergegeven in een tabel waarbij allerlei grafieken gemaakt kunnen worden. Een impressie van de tool is zichtbaar in figuur 3, met een populatiemodel van een *black box* gevuld met 750 gele en 250 oranje balletjes. *TinkerPlots* bevat tevens de optie om resultaten van herhaalde steekproeven te onthouden. Hierbij selecteer je een specifiek kenmerk dat je per steekproef wilt

onthouden, bijvoorbeeld: aantal gele balletjes. De resultaten van het ingevoerde aantal herhaalde steekproeven worden weergegeven in een nieuwe tabel, waarvan opnieuw een grafiek gemaakt kan worden.



figuur 3 Voorbeeld van een populatiemodel met één gesimuleerde steekproef in *TinkerPlots*

Vervolgens gingen leerlingen aan de slag met *real-life* contexten, waaronder het social-media-gebruik. In de klas bleken 20 van de 25 leerlingen dagelijks WhatsApp te gebruiken. Dit komt neer op 80%. Dat is minder dan het landelijk gemiddelde, maar is dit afwijkend? We weten immers dat steekproefresultaten variëren! Niet in elke Nederlandse klas zal precies 88% van de leerlingen dagelijks WhatsAppen. Om hier een uitspraak over te kunnen doen, is het handig om te weten welke steekproefresultaten je op basis van kans kunt verwachten uit een populatieproportie van 88%. Met behulp van *TinkerPlots* gingen leerlingen dit onderzoeken. In figuur 4 vind je het resultaat van 500 herhalingen weergegeven in een steekproevenverdeling. Op basis hiervan is 20 t/m 24 van de 25 leerlingen het meest voorkomend. De kans op een uitzonderlijk laag resultaat van 19 of minder is 6% en de kans op een uitzonderijk hoog resultaat van 25 is slechts 4%. Met de tool kan tevens aangetoond worden dat de kans op een resultaat van 20 of minder ongeveer 18% is. Aan leerlingen de opdracht om hiermee een onderbouwde uitspraak te doen over het social-media-gebruik in de klas.



figuur 4 Voorbeeld van een simulatie met herhaalde steekproeven in *TinkerPlots*

Statistisch inzicht

Deze onderwijsactiviteit in het TLL maakt onderdeel uit van mijn promotieonderzoek met Paul Drijvers en Arthur Bakker als begeleiders, naar een leertraject over de relatie tussen steekproef en populatie. Tijdens deze onderwijsactiviteit zijn gedetailleerde video- en audio-opnamen gemaakt om de wisselwerking tussen *TinkerPlots* en statistische inzichten van leerlingen te onderzoeken, zie figuur 5. Uit de resultaten blijkt dat leerlingen het lastig vinden om een populatie te modelleren. Sterke punten blijken:

(1) *TinkerPlots* nodigt uit tot het discussiëren over allerlei statistische begrippen, wat leidt tot dieper inzicht.
(2) De lay-out van *TinkerPlots* komt sterk overeen met de *black-box*-context en is daardoor toegankelijk voor leerlingen.
(3) *TinkerPlots* biedt rijke mogelijkheden voor (steekproef)data-exploratie.
(4) Benodigde denkstappen voor het interpreteren van steekproefdata vragen ook specifieke (actieve) handelingen in *TinkerPlots*.

De resultaten uit dit onderzoek zullen, samen met bevindingen vanuit twee eerdere interventies, gebruikt worden voor een derde interventie in maart en mei 2019.



figuur 5 Leerlingen aan het werk in het TLL

Ben je, net als wij, enthousiast over deze statistische activiteiten? Dan nodigen we je van harte uit om samen met jouw vwo-3 klas deel te nemen aan onze derde pilot. Deze is inmiddels gestart, maar het is nog mogelijk om hierbij aan te sluiten. Voor aanmelding en meer informatie kun je contact opnemen via *m.j.s.vandijke-droogers@uu.nl*.

vakbladeuclides.nl/945dijke

Over de auteur

Marianne van Dijke-Droogers is wiskundedocente bij Csg Prins Maurits te Middelharnis en sinds 1 september 2016 promovenda bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *m.j.s.vandijke-droogers@uu.nl*
Website: *https://www.uu.nl/staff/MJSvanDijkeDroogers*

NATUURLIJKE GETALLEN, DIE ZIJN PAS ECHT!

Martin Kindt

Volgens overlevering gebruikten de Pythagoreeërs stippenpatronen om natuurlijke getallen te presenteren, bijvoorbeeld bij de 'driehoeksgetallen'. Zulke patronen die later door allerlei wiskundigen zijn gebruikt, kunnen een natuurlijke uitdaging zijn bij het leren van en oefenen met algebra.

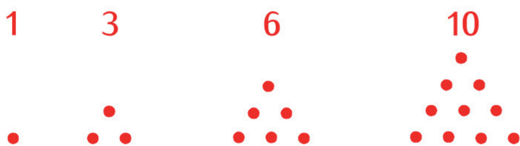
Een artikel van Krooshof

De kop boven dit artikel ontleen ik aan een uitspraak van de schatrijke Amerikaanse wiskundige, bankier en filantroop Jim Simons, die overstapte van de wereld van de wiskunde naar de wereld van het geld. Toen hij die stap had gezet, werd hem gevraagd hoe het voelt om nu in '*de echte wereld*' te zijn. Zijn antwoord was dat de wiskundewereld hem heel wat echter leek dan de zakenwereld.
De natuurlijke getallen, die zijn pas echt! Als je een stelling bewijst dan heb je iets concreets gedaan, waar geen enkele zakelijke onderneming het wat echtheid betreft tegen kan opnemen.[1]

Dat de natuurlijke getallen voor leerlingen een concrete wereld vormen, zal niemand ontkennen.
Dat zij aanvankelijk in algebraonderwijs een belangrijke rol zouden moeten spelen, staat voor mij als een paal boven water. Dit idee is verre van nieuw. Gerrit Krooshof (1909 - 1980) schreef hierover in 1950 in *Euclides* het artikel 'De eerste algebralessen'[2]. Hij begint daarin met het noemen van vier uitgangspunten:

1. *Sluit aan bij het gewone rekenen van de lagere school.*
2. *Laat toch de algebra volkomen nieuw zijn.*
3. *Geef de leerlingen iets, waarmee ze direct zelf kunnen werken.*
4. *Laat de leerlingen van het begin af merken dat wetenschappelijk denken een kritische houding eist, die niets vanzelfsprekend vindt.*

Krooshof begint de eerste algebrales met het noemen van 'enkele historische bijzonderheden'. Zo komt hij al snel bij de getallenleer en getallenmystiek van de 'school van Pythagoras' en bij de 'driehoeksgetallen', zie figuur 1.



figuur 1

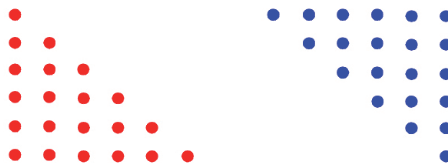
Via de verschillen van de rij 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... , dus 2, 3, 4, 5, 6, ... worden enkele volgende driehoeksgetallen bepaald. Dan – de lezer kan het raden – volgt de vraag naar een veel verder gelegen driehoeksgetal, dat met rangnummer 50. Om de rekenklus het hoofd te bieden komt de volgende formule op het bord:

$$\frac{1}{2} \times n \times (n+1)$$

en Krooshof laat zien hoe substitutie van n = 1, 2, 3, ... de driehoeksgetallen oplevert. Volledige intimidatie, denk ik dan. De rol van de variabele *n* komt zo wel over het voetlicht, maar deze aanpak bevordert toch het 'uit-de-hoge-hoed'-imago van wiskunde?! Krooshof schetst in zijn artikel hoe het verdergaat met vierhoeksgetallen (kwadraten) en vijfhoeksgetallen, waarbij de formules $n \times n$ en $\frac{1}{2} \times n \times (3n-1)$ opduiken.

Stippenpatronen

Het idee van Krooshof om algebraonderwijs te starten met stippenpatronen en bijpassende formules was helemaal niet gek. En hij wilde het meteen spannend maken door met driehoeksgetallen te beginnen, ook goed. Maar dan zou je toch verwachten dat zo'n stippenpatroon gebruikt wordt voor de ontdekking van de formule. Ik neem maar eens het driehoeksgetal 21, waar natuurlijk ook elk van deze patronen bij passen, zie figuur 2.

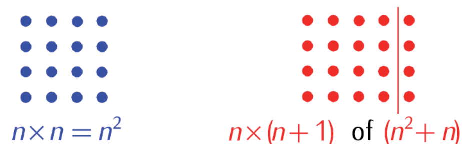


figuur 2

Dat deze patronen zich laten verenigen tot een rechthoek van 6 × 7 stippen is gemakkelijk te zien. Het zesde driehoeksgetal is daarom dan ook te schrijven als

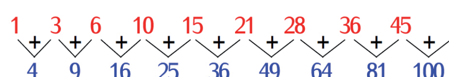
$\frac{1}{2} \times 6 \times (6+1)$: een eerste opmaat naar de formule!

Na nog wat grotere voorbeelden kan - generalisatie! - worden doorgestoten naar de vorm met het symbool *n*. Intussen kan er ook aandacht zijn voor de 'rechthoeksgetallen' (producten van twee opvolgende natuurlijke getallen en daarom altijd even!) en de vierkantsgetallen (kwadraten) met bijpassende formules, zie figuur 3.



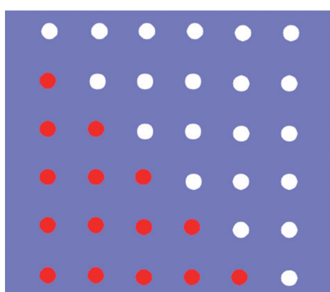
figuur 3

Over kwadraten gesproken: herkennen leerlingen nog dat bijvoorbeeld 144 het kwadraat van 12 is? Het gros niet, ben ik bang, maar jammer is dat wel. Ik wil niet propageren dat je, net als ik vroeger, alle kwadraten tot en met 900 uit het hoofd moet weten, maar het kunnen herkennen van een aantal kleine kwadraten is toch wel handig. Kijk eens naar de rij driehoeksgetallen in figuur 4:



figuur 4

Is de som van *elk* paar opvolgende driehoeksgetallen een kwadraat? Via een computer kun je zoveel gevallen doorrekenen als je maar wilt, maar zekerheid geeft dat niet.



figuur 5

De afbeelding in figuur 5 doet dat wel, want het staat model voor alle mogelijke sommen van twee opvolgende driehoeksgetallen en overtuigt absoluut.
Een formulebewijs van de gesignaleerde eigenschap van de rij driehoeksgetallen ziet er zo uit:

$$\tfrac{1}{2}(n-1)n + \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n = n^2$$

Overtuigt dit meer dan het stippenpatroonbewijs? Ik denk van niet, maar in het kader van zinvol oefenen met algebra, zou ik het wel mooi vinden om leerlingen dit op zeker moment te laten uitvoeren.

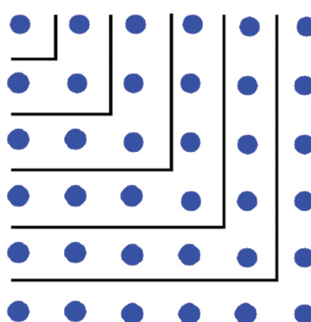
Alleen al het vervangen van *n* in de formule door $n - 1$ is leerzaam. En misschien is er wel een leerling die

$$\tfrac{1}{2}n(n+1) + \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

voorstelt, en dan is de uitwerking nog wat spannender. Algebra oefenen aan de hand van 'getaltheoretische' eigenschappen, ik beveel het warm aan.

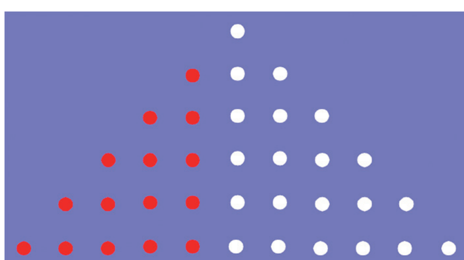
Partiële sommen van oneven getallen

Hieronder versta ik sommen van 'deelrijtjes' (series opvolgende termen) van de rij 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Als zo'n deelrijtje begint met 1, krijg je als uitkomst van de partiële som altijd een kwadraat. Kijk maar naar figuur 6:



figuur 6

Je kunt dit leerlingen zelf laten ontdekken: eerst maar eens gewoon rekenen, zo ontstaat een vermoeden, dan een plaatjesbewijs met stippen of vierkantjes, zoals in figuur 6. Voor hen die de 'stelling' van de som van twee opvolgende driehoeksgetallen kennen kan het ook via het patroon in figuur 7.



figuur 7

In serieuze wiskundeboeken bewijst men deze eigenschap met volledige inductie, maar dat is meer iets voor de bovenbouw van het vwo, zeg bij wiskunde D. Als je toch op de formele toer wilt, zijn er nog andere wegen. Een aardige mogelijkheid is om eerst de even getallen tussen te voegen en dan twee keer de formule voor de driehoeksgetallen toe te passen:

$$1+2+3+\ldots+(2n-1)+2n = \tfrac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)$$

$$2+4+6+\ldots+2n = 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Het verschil van de twee uitkomsten is nu:

$n(2n+1)-n(n+1)=n \cdot n=n^2$

Voor beginners in algebra gaat dit misschien wat ver. Maar ik ga nog een stapje verder en vervang kwadraten door hogere machten. Een paar voorbeelden:

$7^4 = 7 \times 7^3 = 7 \times 343$
$= 337 + 339 + 341 + 343 + 345 + 347 + 349$

$6^5 = 6 \times 6^4 = 6 \times 1296$
$= 1291 + 1293 + 1295 + 1297 + 1299 + 1301$

Deze voorbeelden doen vermoeden dat elke natuurlijke macht van een natuurlijk getal gelijk is aan een partiële som van de rij oneven getallen, met het **aantal** termen gelijk aan het **grondtal** van de macht. En als je nog wat dieper nadenkt, kun je wel begrijpen dat dit vermoeden waar is. De omgekeerde stelling is natuurlijk niet waar. Bekijk maar het volgende rijtje:

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3$$
$$25 + 27 + 29 = 3^4$$
$$79 + 81 + 83 = 3^5$$
$$241 + 243 + 245 = 3^6$$

Alleen speciale partiële sommen met drie termen, namelijk die met een macht van 3 in het midden hebben als som een macht van 3.

$$(3^k-2)+3^k+(3^k+2)=3^{k+1} \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

Bij een macht van een even getal zijn er twee middelste termen, bijvoorbeeld:

$$(4^k-3)+(4^k-1)+(4^k+1)+(4^k+3)=4^{k+1} \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

Het idee dat natuurlijke machten gelijk zijn aan partiële sommen van de rij oneven getallen, leidt tot een bewijs van één van de leukste formules in de wereld van de natuurlijke getallen, namelijk:

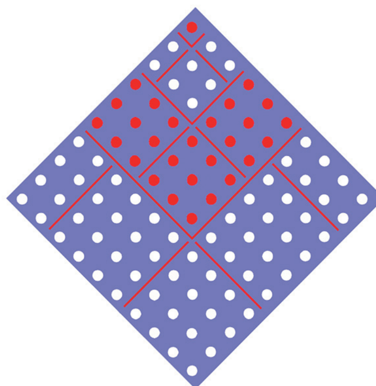
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

Ik kijk naar het geval n = 5:

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$
$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ is zichtbaar gelijk aan de som van de eerste 1 + 2 + 3 + 4 + 5 oneven getallen en die is gelijk aan het kwadraat van 1 + 2 + 3 + 4 + 5. Klaar? Nog niet helemaal, want je kunt je afvragen waarom de partiële sommen bij de opvolgende derdemachten zo mooi op elkaar aansluiten. Algebra biedt zekerheid: de partiële som bij n^3 begint met $n^2 - (n - 1) = n^2 - n + 1$ en stopt bij $n^2 + (n - 1)$.

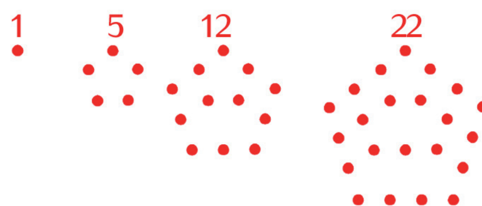
Vervanging van n door $n - 1$ in deze laatste vorm levert de eindterm van de partiële som bij $(n - 1)^3$ en dat is dan $(n - 1)^2 + (n - 2)$ ofwel $n^2 - n - 1$. En ja, dat is in de rij oneven getallen de voorganger van $n^2 - n + 1$.
Er zijn ook mooie 'kijk-en-zie-bewijzen' voor deze merkwaardige identiteit, zie bijvoorbeeld figuur 8.[3]



figuur 8

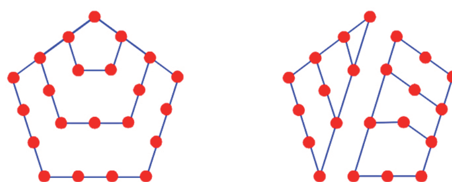
Veelhoeksgetallen

Ik keer even terug naar het artikel van Gerrit Krooshof. Daarin staat een plaatje van de eerste drie vijfhoeksgetallen, waaraan ik het vierde heb toegevoegd, zie figuur 9.



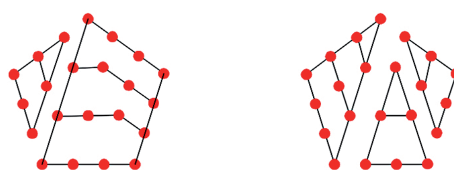
figuur 9

Met lijntjes kun je de structuur beter zichtbaar maken en bijvoorbeeld ontdekken dat zo'n getal de som is van een driehoeksgetal en een rechthoeksgetal, zie figuur 10.



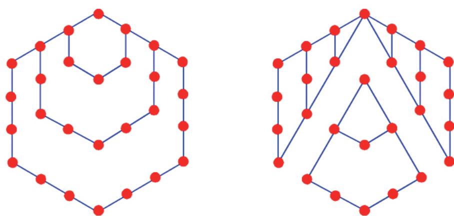
figuur 10

Zo kan Krooshofs formule $\frac{1}{2} \times n \times (3n-1)$ worden begrepen via de som $\frac{1}{2}n(n+1)+(n-1)n$.
Er zijn ook andere strategieën mogelijk, zie figuur 11:



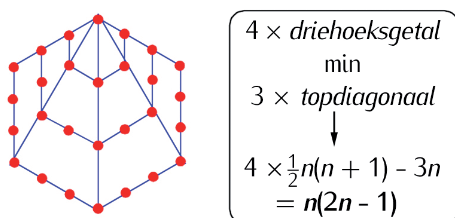
figuur 11

Ook deze verdelingen leiden tot Krooshofs formule. Er bestaan ook zeshoeksgetallen, zoals in figuur 12. Het rechter plaatje – twee driehoeksgetallen (met overlap van één stip) en een patroon van opvolgende oneven getallen – helpt bij het vinden van een formule.



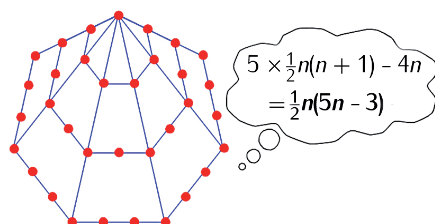
figuur 12

Dit leidt tot: $2\times\frac{1}{2}n(n+1)-1+(n-1)^2=\boldsymbol{n(2n-1)}$.
Een algemenere aanpak is via de drie 'topdiagonalen', zie figuur 13.



figuur 13

Deze aanpak laat zich ook toepassen bij 'm-hoeksgetallen, met $m = 7, 8, 9, ...$ Bijvoorbeeld voor zevenhoeksgetallen, zie figuur 14:



figuur 14

Uit het algebraboek van Euler

Leonard Euler (1707-1783) liet, nadat hij op 59-jarige leeftijd na een mislukte staaroperatie volledig blind werd, zijn wiskundige gedachten opschrijven door zijn bediende. Omdat die geen wiskundige scholing had ontvangen, dicteerde Euler hem een '*Vollständige Einleitung zur Algebra*'. In dit boek is een lijst met formules te vinden die kunnen worden geverifieerd met de zojuist besproken diagonaalmethode.

3-hoek	$\frac{n(n+1)}{2}$	*9-hoek*	$\frac{n(7n-5)}{2}$
4-hoek	n^2	*10-hoek*	$n(4n-3)$
5-hoek	$\frac{n(3n-1)}{2}$	*11-hoek*	$\frac{n(9n-7)}{2}$
6-hoek	$n(2n-1)$	*12-hoek*	$n(5n-4)$
7-hoek	$\frac{n(5n-3)}{2}$	*20-hoek*	$n(9n-8)$
8-hoek	$n(3n-2)$	*25-hoek*	$\frac{n(23n-21)}{2}$

Het patroon in het rijtje formules wordt zichtbaar door alle formules te schrijven als breuk met noemer 2.
Euler gaf ook de algemene formule voor de m-hoek:

$$\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$$

Deze kan worden gevonden door het 'm-hoeksgetal met rangnummer n' te bepalen via het aantal stippen in de m — 2 deeldriehoeken, minus het aantal stippen op de m — 3 diagonalen, dus via:

$$(m-2)\tfrac{1}{2}n(n+1)-(m-3)n$$

Euler vond zijn formules niet op deze wijze, maar met de somformule van de rekenkundige rij.
Als voorbeeld neem ik de zevenhoek.
De 'groei-aantallen' 1, 6, 11, 16, ... van de stippen per 'verdieping' vormen een rekenkundige rij. Op de n-de verdieping bevinden zich $1 + 5(n - 1) = 5n - 4$ nieuwe stippen. De som van de eerste n termen van de rij groei-aantallen is gelijk aan:

$$\tfrac{1}{2}n(1+5n-4)=\frac{n(5n-3)}{2}$$

Koningin van de wiskunde

Gauss, een andere wiskundige van de buitencategorie, heeft ooit de getaltheorie gekroond tot 'koningin van de wiskunde'. Wat je hier ook van vindt, feit is dat veel getaltheoretische stellingen, even toegankelijk als ontoegankelijk zijn, iets wat ook wel bij koninginnen voorkomt. De portee van bijvoorbeeld: '*ieder natuurlijk getal is de som van ten hoogste drie driehoeksgetallen*' is direct te begrijpen, maar Gauss heeft alle zeilen bij moeten zetten om dit te bewijzen. Daarvan getuigt zijn triomfantelijke notitie:

Eureka!
Num = Δ + Δ + Δ

Dat ‘ten hoogste’ kun je weglaten als je 0 ook als driehoeksgetal wilt zien. Die stelling van Gauss is gelijkwaardig met: ‘ieder 8-voud + 3 is de som van drie oneven kwadraten.’ Kijk maar:

$$8n + 3 = (2a+ 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$$
$$= 4(a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c) + 3$$



$$n = \tfrac{1}{2}a(a + 1) + \tfrac{1}{2}b(b + 1) + \tfrac{1}{2}c(c + 1)$$

Elementaire algebra dus! Op dergelijke wijze kun je ook aantonen dat twee even kwadraten en één oneven kwadraat nooit een 8-voud + 3 opleveren en ook dat je met minder dan drie kwadraten niet kunt toekomen. Gauss had voor deze drie-kwadraten-stelling stevige getaltheorie nodig. Euler bewees eerder met elementaire (niet hetzelfde als eenvoudige!) algebra, dat elk natuurlijk getal de som van ten hoogste vier kwadraten is.
Uit 7 = 1 + 1 + 1+ 4, volgt dat het met minder dan vier niet altijd lukt. Drie 3-hoeksgetallen, vier 4-hoeksgetallen, gaat dit zo door? Als je natuurlijke getallen als de som van 5-hoeksgetallen wilt schrijven, zul je er soms vijf nodig hebben. Kijk naar: 9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 5. En van de *m*-hoeksgetallen heb je ten hoogste *m* nodig om een natuurlijk getal als som te schrijven. Een getal waar je zeker niet met minder toekomt is:

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m \text{ keer}} + (m - 1) = 2m - 1$$

Cauchy heeft als eerste bewezen dat je er nooit méér dan *m* nodig hebt. Kortom: het aantal *m*-hoeksgetallen waarin je een natuurlijk getal kunt splitsen is ten hoogste gelijk aan ***m***.

‘DOE MEER MET NATUURLIJKE GETALLEN!’

En over de drie-kwadratenstelling gesproken. We leven nu in 2019 en dat is een 8-voud + 3. En ja, als ik met [*a*, *b*, *c*] bedoel $a^2 + b^2 + c^2$, dan geldt:
2019 = [1, 13, 43] = [5, 25, 37] = [7, 11, 43] = [7, 17, 41] = [11, 23, 37] = [13, 13, 41] = [13, 25, 35] = [17, 19, 37] = [23, 23, 31].

Tot slot van mijn pleidooi ‘doe meer met natuurlijke getallen’ een uitspraak van de bekende Engelse wiskundige Ian Stewart: ‘*A natural number is an idea that has long ago been ‘thingified’ so thoroughly that everbody thinks of it as a thing*’.[4]

Noten

[1] Uit de mooie oratie van H.W. Lenstra (2000). *Aeternitatem Cogita.* Leiden. In het *NRC Handelsblad* stond in november 2018 een stukje onder de kop ‘Een blije leraar wiskunde is beter’. Pia de Jong deed daarin verslag van het jaarlijkse gala van ‘Math for America’ in New York waar zo’n duizend leraren voor waren geselecteerd. ‘Math for America’, opgericht en gefinancierd door Jim Simons, stimuleert leraren in exacte vakken onder meer door het toekennen van beurzen.

[2] Krooshof, G. (1950). De eerste algebralessen, *Euclides*, 25(3), pp. 164-168.

[3] Kindt, M. (2015). *Wat te bewijzen was.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

[4] Stewart, I., (1995). *Nature’s number’s. the unreal reality of mathematical imagination. New York:* Basic Books.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

IN MEMORIAM GERT TREURNIET

Bestuur NVvW

Op 16 januari 2019 kregen we het bericht dat ons bestuurslid Gert Treurniet was overleden. Voor de kerstvakantie had Gert ons op de hoogte gesteld van het feit dat hij longkanker had en daarvoor spoedig behandeld zou gaan worden. Na de vakantie is zijn toestand in korte tijd sterk verslechterd. Helaas is het niet meer mogelijk gebleken om de afspraak om samen een kopje koffie te drinken, na te komen.



Gert maakte vanaf november 2015 deel uit van het bestuur. Voordat hij in het onderwijs kwam te werken, was hij betrokken bij Texas Instruments. Zijn kennis op het gebied van ict-vraagstukken was voor het bestuur en de vereniging van grote betekenis. Hij sprak hierover dan ook met enig gezag in vergaderingen. Niet op een vrijblijvende manier. En wanneer hij er vanuit zijn expertise van overtuigd was dat er actie moest worden ondernomen, werk moest worden gedaan, dan deed hij dat ook.

Door zijn inspanning is het voor onze leden mogelijk om de *Euclides* via een app te lezen, waarbij de links aanklikbaar zijn. Daarnaast is hij vanuit het bestuur nauw betrokken geweest bij overleg met de CvTE over de grafische rekenmachine en maakte hij deel uit van de commissie die adviezen uit moest brengen over de toekomst van de grafische rekenmachine en over mogelijkheden om ict in te zetten tijdens het centraal examen voor havo en vwo. Ook in die clubs werd er naar hem geluisterd, maar Gert luisterde zelf ook goed en hij analyseerde voortdurend welke oplossing of gedachtegang mogelijk, redelijk en wenselijk was.

Verder maakte hij deel uit van het bestuur van de stichting wiskunde D-online. Alsof dat alles niet genoeg was startte hij dit schooljaar aan de TU Delft met de studie voor een eerstegraadsbevoegdheid informatica. Dat alles deed hij naast zijn werk als wiskundedocent op het Sorghvliet in Den Haag.

Boven alles hebben we Gert leren kennen als een lieve en behulpzame man. Iemand die zonder veel gedoe deed wat hij beloofde. Iemand met een groot hart voor leerlingen, voor wiskunde en voor wiskundeonderwijs. We zullen hem heel erg missen.

MEDEDELING



Nederlandse wiskunde olympiade

Op 15 maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op twaalf universiteiten.
De opgaven en uitwerkingen zijn na afloop gepubliceerd op *www.wiskundeolympiade.nl.*
Ongeveer duizend leerlingen waren uitgenodigd voor de tweede ronde. De leerlingen deden mee in drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer veertig leerlingen uitgenodigd worden voor de finale in september. Wie de winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekend gemaakt.

NLT EN WISKUNDE

Harrie Jorna

Nlt (Natuur, Leven en Technologie) is een tamelijk nieuw vak: het bestaat nu bijna twaalf jaar. Het is een multidisciplinair vak: het omvat alle bètavakken en dus ook wiskunde. Het is daarom de bedoeling dat het vak gegeven wordt door een multidisciplinair team. Harrie Jorna bespreekt de wiskunde in nlt-modules en roept ons op om in nlt-teams te participeren.

Aanleiding

De NVON, de Nederlandse Vereniging voor Onderwijs in de Natuurwetenschappen, heeft een aantal sectiebesturen, waarvan de Sectie NLT er één van is. In dit sectiebestuur zitten biologen, natuurkundigen en scheikundigen die lid zijn van de NVON. Er zit ook een docent wiskunde in, die de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren vertegenwoordigt, evenals een fysisch geograaf die het Koninklijk Nederlands Aardrijkskundig Genootschap (KNAG), vertegenwoordigt. De Sectie NLT heeft gevraagd een artikel te schrijven over wiskunde en nlt dat zowel in de *NVOX* (het vaktijdschrift van de NVON) als in *Euclides* verschijnt.

‘WISKUNDE WORDT INGEZET OM EEN PROBLEEM OP TE LOSSEN. NIET ANDERSOM: EEN LEUKE CONTEXT ZOEKEN BIJ EEN ONDERDEEL VAN HET WISKUNDEPROGRAMMA.’

Modulair vak en organisatie

Nlt is naast multidiciplinair ook modulair. Er zijn ongeveer 75 nlt-modules. Er zijn 26 havo-modules en de overige zijn vwo-modules. Een module is geschreven voor ongeveer veertig studielasturen. Voor een module is dus ongeveer een trimester nodig. Op het havo worden meestal vijf modules gekozen en op het vwo zeven. Voor nlt bestaat geen centraal examen, alleen een school-examen.

Rob Diependaal, de vertegenwoordiger van de NVvW in de Sectie NLT, heeft meegeschreven aan de vwo-module *Noordzee, meer dan een plas water*. In deze module is de Noordzee de centrale context. De medeopdrachtgever is Rijkswaterstaat. Dat universiteiten, instellingen voor hoger onderwijs en kennisinstituten medeopdrachtgever zijn voor nlt-modules is ook kenmerkend voor het vak. De centrale contexten zijn daardoor realistisch en hedendaags en de modules bevatten vaak informatie voor het vervolgonderwijs. De hoofdopdrachtgever was tot voor kort SLO. De nieuwe hoofdopdrachtgever is sinds 1 januari 2016 de Vereniging NLT. Scholen kunnen lid worden van deze Vereniging NLT. De contributie bedraagt €1500,- per jaar. De directies van de deelnemende nlt-scholen zijn samen eigenaar van de Vereniging NLT. Het lidmaatschap geeft toegang achter het ‘slotje’ van de site *http://betavak-nlt.nl/nl/p/* naar de modules die onder de verantwoordelijkheid van de Vereniging NLT zijn ontwikkeld. Het deel vóór het slotje bevat de openbare modules die ontwikkeld zijn onder verantwoordelijkheid van SLO.

Voorbeeld van wiskunde in nlt

In de module *Noordzee, meer dan een plas water*[1] heeft Rob Diependaal drie paragrafen geschreven van het hoofdstuk Lessenserie Modellering Waterkolom Noordzee. De eerste paragraaf gaat over een nuldimensionaal model van een waterkolom. Het model staat stil, maar er kunnen wel stoffen in en uit (water, zout, lucht) en er kunnen stoffen in reageren, bijvoorbeeld zuurstof.

Er zijn zuurstofgebruikers en zuurstofproducenten. Hun gezamenlijk effect in de tijd is dO_2 / dt. Enig rekenwerk in de module resulteert in de formule $dO_2 / dt = k \cdot [O_2]$: een differentiaalvergelijking! Voor de leerlingen die deze vergelijkingen nog niet met integreren hebben leren oplossen, wordt de uitkomst gegeven. Deze kunnen ze dan controleren door hem te differentiëren.

Met wiskunde problemen oplossen

Je ziet dat wiskunde wordt ingezet om een probleem op te lossen. Niet andersom: een leuke context zoeken bij een onderdeel van het wiskundeprogramma. De clou van de beschouwing van de zuurstofproductie en het zuurstof-

verbruik is, dat de productie uitgezet in een grafiek (te verkrijgen met de grafische rekenmachine) een zuurstof-concentratiestijging tegen de tijd laat zien en het verbruik een concentratiedaling. Op een gegeven moment snijden de beide grafieken elkaar en zijn de snelheden van de zuurstofconcentratieveranderingen aan elkaar gelijk: de stijging en de daling heffen elkaar op en vanaf dat moment is er evenwicht en blijven de concentraties gelijk. Deze beschouwingen lijken als vanzelfsprekend uit de pen te rollen: wiskundige vanzelfsprekendheden kloppen met controleerbare, vanzelfsprekende werkelijkheden.

Nog een voorbeeld

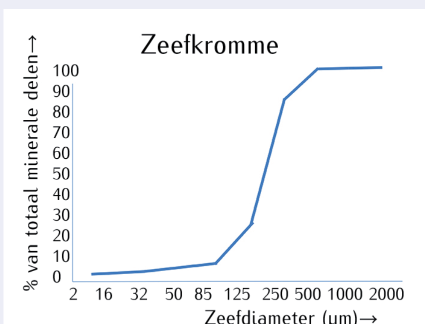
Op dit moment wordt de nlt-module *Een Dijk van een Dijk, Hoogwaterbeschermingsprogramma* geschreven door Anneke de Leeuw (natuurkunde), Rick Teunissen (biologie) en door mij (scheikunde) als eindredacteur. Het geheel staat onder leiding van Pieter Hogenbirk, voorzitter van de Vereniging NLT. De module is mede geïnitieerd door Rijkswaterstaat. In de module wordt een experiment met zandzeven met diverse doorlaatbaarheid uitgevoerd om van een bepaalde soort zand de verdeling over de diverse categorieën diameters vast te stellen. De korrelgrootte van zand heeft namelijk te maken met de weerstand tegen afschuiven van dijken, in de volksmond ook wel afkalven genoemd. Hoe groter de zandkorrels, hoe meer de dijk tegen afschuiven bestand is. In de module wordt korrelgrootte als volgt geïntroduceerd en bevraagd. Op de website van *Euclides* zie je de antwoorden.

Korrelgrootte

Vraag

Noem naast de grootte van de korrels nog een andere eigenschap die mede bepaalt of een korrel gemakkelijk of moeilijk in beweging komt. Leg uit.

Om de korrelgrootte te bepalen, wordt een aantal fijne en minder fijne zeven gebruikt, dus met kleinere en grotere openingen: de mazen hebben verschillende diameters. In figuur 1[2] zie je het resultaat van het zeven met verschillende zeefdiameters. Bij 2000 op de x-as hoort 100% op de y-as. Dat betekent dat als je een zeef gebruikt met een diameter van 2000 μm, al het betreffende zand door de zeef valt.



figuur 1 Zeefkromme

Vragen

a. De lijn van figuur 1 is ontstaan door het verbinden van meetpunten: het is geen vloeiende curve. Hoeveel zeven zijn dus (minstens) gebruikt?
b. Denk je dat deze figuur op één soort zand slaat of op meerdere soorten? Leg uit.
c. Verklaar waarom de grafiek stijgt.
d. Gebruik je de zeef met **maasdiameter** van 63 μm dan gaat 9% van het zand erdoor. Wat kun je nu concluderen over de diameter van de zandkorrels van het zand?
e Je kunt nu uit de grafiek de verdere afmetingen van de korrels in het onderzochte zand aflezen. Vul de volgende tabel verder in.

minder dan ... μm	%	tussen ... en ... μm	%
		0 en 2	2
2	2	2 en 16	2
16	4	16 en 32	...
32	7	32 en 50	...
50	8	... en ...	...
63	...	... en ...	...
125	27	... en ...	...
250	85	... en ...	...
500	98	500 en groter	...
			100

f. Welke afmeting van de zandkorrels komt dus het meest voor in het onderzochte zand? Voor hoeveel procent bestaat het zand uit korrels van die afmeting?
g. Wat is er op de afgelezen plek met de grafiek aan de hand?
h. Het bepalen van de getallen in de derde kolom lijkt op een bewerking die je misschien al bij wiskunde of natuurkunde bent tegengekomen. Geef de naam van deze bewerking.

Bespreking

Vraag h is mij pas in een zeer laat stadium ingevallen. De meeste van de andere vragen en de tekst zijn door Anneke, de natuurkundige, bedacht. Ik vraag me af of een wiskundige niet veel sneller afgestevend zou zijn op wat nu het einddoel lijkt te zijn. Ik denk dat een wiskundige

figuur 1 vrijwel meteen had laten differentiëren (door van meetpunt tot meetpunt het differentiequotiënt, de helling, te laten bepalen, met de waarschuwing dat de *x*-as niet lineair is!) en vervolgens de leerlingen met een aantal opdrachten (waaronder uiteindelijk het zandzeven zelf) zich er bewust van had laten worden wat het nut is van deze wiskundige bewerking. In eerste instantie is dat nut het bepalen waar, bij welke categorie korrelgrootte, de helling het steilst is, dus waar het differentiequotient het grootst is. Dit maximum geeft aan van welke categorie korrelgroottes het aandeel in het zand het grootst is. Het maximum via de tweede afgeleide bepalen is alleen mogelijk als de formule voor de grafiek bekend is en zal voor de meeste leerlingen misschien te ver gaan. Het inschatten van de moeilijkheidsgraad zal een collega wiskunde veel beter afgaan. De module is voor begin havo 5 bedoeld.

Als de laatste stap niet te moeilijk is, betekent de directe wiskundige aanpak een tijdswinst, volgens mij. Ik vraag me echter af of deze aanpak voor een aantal leerlingen misschien te abstract is. We hebben in ieder geval de opzet laten staan zoals hij hierboven staat en horen graag van een wiskundige wat die ervan vindt. Dit soort vragen wordt in een nlt-onderwijsteam natuurlijk veel sneller beantwoord als een wiskundige deel uitmaakt van het team. Ook bij het schrijven van een module is een wiskundige als coauteur zeker aan te bevelen: hij of zij kan bijvoorbeeld aangeven of de wiskunde qua vraagstelling juist is en kan in de module gemiste kansen op toepassing van wiskunde invoegen. Natuurlijk kan ook een wiskundecollega die geen nlt geeft vraagbaak zijn. Het gemiddeld aantal wiskundigen in een nlt-onderwijsteam is 0,6[3]...

Voel je je geroepen? In het overgrote deel van de nlt-modules komt wiskunde voor.
Wat voor soorten wiskunde? Even de wiskundigen verleiden iets met nlt te gaan doen:

- functies, tabellen, grafieken;
- differentiëren (eerste en tweede afgeleiden), integreren;
- differentiaal- en differentievergelijkingen;
- rijen en reeksen;
- goniometrie;
- modulo-rekenen (foutencodering);
- kansrekening;
- statistiek (meetfouten, correlatie, regressie, filteren);
- modelvorming;
- meetkunde (vlak, ruimte, vectoren)[4].

Dit artikel is eerder gepubliceerd in *NVOX* 43-7, september 2018

Noten

[1] *https://betavaknlt.nl/dmedia/media/site-files/4eb5c/bbbd0/ad37b/284a1/b98c8/Noordzee_meer_dan_een_plas_water.pdf*
[2] Figuur 1: *http://www.joostdevree.nl/bouwkunde2/jpgz/zeefkromme_1_algemeen_www_sgc_nl.gif_*
[3] en [4] Rob Diependaal, Workshop_WVVW conferentie_2017_10_04_v00, zie *Euclides* website

Voor antwoorden op de opgaven van dit artikel:


vakbladeuclides.nl/945jorna

Over de auteur

Harrie Jorna was tot zijn pensionering docent scheikunde en anw en is eindredacteur van *NVOX*, magazine voor het onderwijs in natuurwetenschappen. Harrie Jorna is tevens lid van de sectie NLT van NVON.

VERVOLG OP MET 130 LEERLINGEN OP EXCURSIE

Euclides 94-3, blz 35

Auteur Simon Biesheuvel: Aan het CvTE heb ik gevraagd of het 130 leerlingen probleem examenstof is.
Het antwoord van het CvTE was:
Beste Simon,
Dank voor je mail over het onderwerp combinatoriek. Het in je mail genoemde onderdeel hoort zeker tot de examenstof. Je constatering dat dit op pagina 59 van Moderne Wiskunde 5C, 11e editie bij vraag 5c verkeerd behandeld wordt, is terecht. We hopen dat de gebruikers van deze methode Noordhoff hierop zullen attenderen.
Mijn reactie, nadat ik Noordhoff heb geïnformeerd:
Bedankt voor het supersnelle antwoord.
Mag ik dit, als reactie van het CvTE in Euclides zetten bij het 'vervolg' op het stukje hierover?

Met als antwoord:
Beste Simon,
Dat mag, je kunt dit stukje in Euclides plaatsen.

Bij dezen, Tom Goris

ONEINDIG VEEL OPLOSSINGEN

Simon Biesheuvel

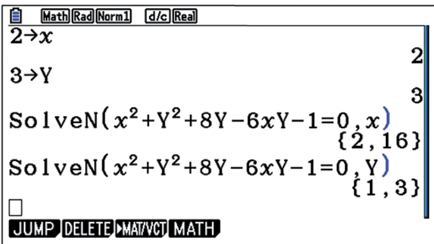
Door de GR op een slimme manier in te zetten (zoals de inzet van de GR ook eigenlijk bedoeld is…), kun je verrassende resultaten boeken. Simon Biesheuvel komt door de GR op een idee hoe je kunt bewijzen dat een vergelijking oneindig veel oplossingen heeft.

Opgave

Bewijs dat de vergelijking $x^2 + y^2 + 8y - 6xy = 1$ oneindig veel oplossingen heeft waarbij x en y gehele getallen zijn.

Oplossing

De vergelijking wordt herschreven naar $x^2 + y^2 + 8y - 6xy - 1 = 0$. Eerst het volgende: als de vergelijking $x^2 + bx + c = 0$, waarbij b en c gehele getallen zijn, een oplossing heeft met een gehele uitkomst, dan is de tweede oplossing ook een geheel getal. Dat moet wel omdat b geheel is en de twee oplossingen opgeteld gelijk zijn aan $-b$. Met proberen (en daarna SolveN op de Grafische Rekenmachine) kom ik op (onder andere) $x = 2$ en $y = 3$ als mogelijke oplossing, zie figuur 1.



figuur 1

Ik gebruikte het RUN-menu op mijn Casio CG50. Neem ik $x = 2$ op de eerste regel dan zie ik op de vierde regel dat $y = 1$ of 3. Neem ik $y = 3$ op de tweede regel, dan zie ik op de derde regel dat $x = 2$ of 16. Daarna heb ik steeds de getallen op de eerste en tweede regel aangepast. (2, 3) geeft bij $y = 3$ weer (2, 3) maar ook (16, 3). (16, 3) geeft bij $x = 16$ weer (16, 3) maar ook (16, 85). (16, 85) geeft bij $y = 85$ weer (16, 85) maar ook (494, 85). (494, 85) geeft bij $x = 494$ weer (494, 85) maar ook (494, 2871) enzovoort.

```
x      2    16    494
     /  \  /  \  /   \       enz.
y  1     3     85     2871
```

Stap 1

Stel dat $(x, y) = (m, n)$ een oplossing is van de gegeven vergelijking. Met $n > m$ en $m \geq 2$.
Vul in de vergelijking in: $y = n$. Dat geeft de vergelijking $x^2 + n^2 + 8n - 6nx - 1 = 0$ ofwel $x^2 - 6nx + n^2 + 8n - 1 = 0$.
$x = m$ is een oplossing van deze vergelijking.
Noem een tweede oplossing m_1.
De som van de twee oplossingen is $6n$. Dus $m_1 = 6n - m$ dus $m_1 = 5n + n - m$.
Omdat $n > m$ geldt $m_1 > 5n$. Dus is $m_1 > n$.
Dus is een nieuwe oplossing $(x, y) = (m_1, n)$ maar nu met $m_1 > n$.

Stap 2

Stel dat $(x, y) = (m, n)$ een oplossing is van de gegeven vergelijking. Met $m > n$ en $n \geq 3$.
Vul in de vergelijking in: $x = m$. Dat geeft de vergelijking $m^2 + y^2 + 8y - 6my - 1 = 0$.
Ofwel $y^2 + (8 - 6m)y + m^2 - 1 = 0$.
$y = n$ is een oplossing van deze vergelijking. Noem een tweede oplossing n_1.
De som van de twee oplossingen is $-(8 - 6m)$.
Dus $n_1 = -8 + 6m - n$ dus $n_1 = -8 + 5m + m - n$.
Omdat $m > n$ geldt $n_1 > -8 + 5m$.
$n_1 > -8 + 3m + 2m$. Omdat $m > 3$ geldt $n_1 > -8 + 9 + 2m$ dus $n_1 > 1 + 2m$.
Dus is een nieuwe oplossing $(x, y) = (m, n_1)$ maar nu met $n_1 > m$.

Ik heb dus bewezen dat na de oplossing (2, 3) ik steeds nieuwe oplossingen kan vinden waarbij volgens stap 1 de x-waarde groter wordt dan de y-waarde en daarna volgens stap 2 de y-waarde groter wordt dan de x–waarde. Dus met een soort dubbele volledige inductie is het bewijs geleverd.

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum.
E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*

HARMONISCH TOTAAL EN AANVERWANTEN

Gerard Koolstra

Het harmonisch gemiddelde van *n* argumenten kun je berekenen door *n* te delen door de som van de omgekeerden van die argumenten. Maar als je niet *n* maar het getal 1 deelt door deze som van omgekeerden krijg je ook iets interessants. Gerard Koolstra gebruikt de naam *harmonisch totaal* voor deze uitdrukking en gaat in op eigenschappen en toepassingen.

Inleiding

Wanneer iemand het eerste stuk van een reis 20 km/u rijdt, het volgende 80 km/u en het laatste stuk 50 km per uur, kan de gemiddelde snelheid over het totale traject berekend worden met het *harmonisch gemiddelde* van 20, 50 en 80. Als de drie stukken tenminste even lang zijn[1]:

$$h(20,\,50,\,80)=\frac{1}{\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{50}+\frac{1}{80}\right)/3}=\frac{3}{\frac{1}{20}+\frac{1}{50}+\frac{1}{80}}$$

$$=\frac{3}{\frac{33}{400}}=\frac{1200}{33}=36\frac{4}{11}\quad \text{km/u}$$

In het algemeen geldt:

$$h(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}\qquad (x_k\neq 0)$$

Opmerkelijk is dat dat de uitdrukking $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}$ (voor zover ik weet) geen algemeen gebruikte naam heeft. Ik gebruik in dit artikel de naam *harmonisch totaal.*[2] Dit ondanks het feit dat het harmonisch totaal kleiner is dan het harmonisch gemiddelde.[3] We kunnen het harmonisch totaal onder andere gebruiken bij de vraag wat het effect is van de inzet van onervaren hulpkrachten bij een ervaren kracht. Als een ervaren kracht voor een bepaald karwei 10 uur nodig heeft, en er twee hulpkrachten worden ingehuurd die respectievelijk 25 en 30 uur nodig zouden hebben, dan is er nu bijna 6 uur voor nodig.[4]
Immers: per uur klaren de drie mensen samen $\frac{1}{10}+\frac{1}{25}+\frac{1}{30}=\frac{26}{150}=\frac{13}{75}$ van het karwei zodat er $\frac{75}{13}$ uur ($\approx$ 5:45) nodig is. Het gaat om het omgekeerde van de som van de omgekeerden. Kort genoteerd:

$$H(10,25,30)=\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{25}+\frac{1}{30}}=\frac{75}{13}\cdot$$

Mede om breuken in breuken te voorkomen wordt vaak gebruikt gemaakt van notaties als

$$\frac{1}{H(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}.\ \text{(formule 1)}$$

Er zijn tal van andere toepassingen. Hieronder een paar voorbeelden:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}$$

(*vervangingsweerstand* bij parallelschakeling)

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\ldots+\frac{1}{m_n}$$

(*gereduceerde massa* van een aantal lichamen)

$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ (*straal ingeschreven cirkel* van driehoek met gegeven hoogtes)

$\frac{1}{f}=\frac{1}{v}+\frac{1}{b}$ (*lenzenformule*)

Als er slechts *twee* getallen bij betrokken zijn, dan kan het harmonisch totaal als volgt herschreven worden:

$$H(x,y)=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{1}{\frac{x+y}{xy}}=\frac{xy}{x+y}.\ \text{(formule 2)}$$

Het harmonisch totaal heeft een paar min of meer voor de hand liggende eigenschappen:

1. De uitkomst is onafhankelijk van de volgorde van de argumenten $x_1,\ldots,x_n$.
2. De berekening kan desgewenst opgesplitst worden in berekeningen van het harmonisch totaal van twee getallen. $H(a, b, c) = H(a, H(b, c))$.
3. Als alle *n* argumenten gelijk zijn is het harmonisch totaal gelijk aan het n^e deel van één argument: $H(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{n}$ als geldt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Dit geldt ook voor $n = 1$, dus $H(a) = a$.
4. Als alle argumenten met hetzelfde getal *k* worden vermenigvuldigd, wordt ook de uitkomst *k* maal zo groot: $H(kx_1, \ldots, kx_n) = k \cdot H(x_1, \ldots, x_n)$ $(k \neq 0)$.
5. Elk van de argumenten is te schrijven als een harmonische som. In het bijzonder geldt: $y = H(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow x_1 = -H(-y, x_2, \ldots, x_n) = H(y, -x_2, \ldots, x_n)$.
Vanwege eigenschap 1 is beperking tot x_1 geen echte beperking.

6. Het toevoegen van een positief argument zorgt voor een *verlaging* van het harmonisch totaal: $H(x_1, ..., x_{n+1}) < H(x_1, ..., x_n)$ $(x_1, ..., x_{n+1} > 0)$.
7. Het harmonisch totaal van n getallen is voor $n > 1$ altijd kleiner dan het minimum van deze getallen: $H(x_1, ..., x_n) < \text{Min}(x_1, ..., x_n)$ $(x_1, ..., x_{n+1} > 0)$.

De eerste eigenschap volgt direct uit formule 1. Aan de rechterkant gaat het immers om een gewone optelling die niet afhankelijk is van de volgorde.
De tweede eigenschap kan toegelicht worden met de volgende herleiding:

$$\frac{1}{H(a,b,c)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c} =$$

$$\frac{1}{H(a,b)} + \frac{1}{c} = \frac{1}{h} + \frac{1}{c} = \frac{1}{H(h,c)}$$

met $h = H(a, b)$.
Hieruit volgt dat $H(a, b, c) = H(H(a, b), c)$. Omdat volgens eigenschap 1 de volgorde (a, b, c) niet van belang is kan met evenveel recht geschreven worden: $H(a, b, c) = H(c, a, b) = H(H(c, a), b) = H(H(a, c), b)$ of bijvoorbeeld: $H(a, b, c) = H(H(b, c), a)$.

Denkend aan het voorbeeld van het effect van inzet van hulpkrachten om het werk van een ervaren kracht te ondersteunen is dat ook voor de hand liggend. Desgewenst kan eerst het effect van het inhuren van de hulpkrachten een voor een worden berekend worden of eerst de tijd die van de beide hulpkrachten samen zouden nodig hebben voor het karwei.
Eigenschap 3 is met behulp van formule 1 eenvoudig te doorgronden. We noemen de n gelijke argumenten a.
Nu geldt:

$$\frac{1}{H(a,\cdots,a)} = \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a} = \frac{n}{a} \leftrightarrow H(a,\cdots,a) = \frac{a}{n}$$

De vierde eigenschap volgt ook eenvoudig uit formule 1. Als alle argumenten $x_1, ..., x_n$ met k worden vermenigvuldigd, worden hun omgekeerden k maal zo klein, en dus de som daarvan ook. Het omgekeerde wordt dus weer k keer zo groot. Iets formeler:

$$H(kx_1, ..., kx_n) = \frac{1}{\frac{1}{kx_1}+\cdots+\frac{1}{kx_n}} = \frac{k}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} = k \cdot H(x_1, ..., x_n)$$

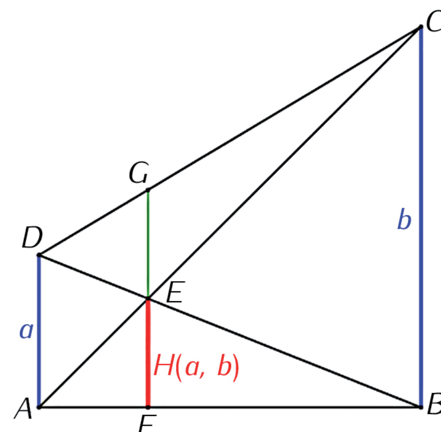
Deze eigenschap zorgt er bijvoorbeeld voor dat als we op basis van hoogtes in mm tot een straal van 17 mm komen, we zeker weten dat als de hoogtes in cm worden uitgedrukt de straal ook volgens een nieuwe berekening 1,7 cm zal zijn. Ook de vijfde eigenschap volgt vrij eenvoudig uit formule 1:

$$y = H(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leftrightarrow$$

$x_1 = -H(-y, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow$ [eigenschap 3 met $k = -1$]
$\leftrightarrow x_1 = H(y, -x_2, ..., x_n)$.

Eigenschap 6 volgt bij positieve argumenten ook snel uit formule 1. Toevoeging van een extra positief argument betekent dat $1 / H$ groter wordt, en dus H kleiner. Ook dat ligt voor de hand gezien het hulpkrachtenvoorbeeld.
Eigenschap 7 volgt uit eigenschap 6. Om dat te zien (her)ordenen we de argumenten $x_1, ..., x_n$ zo, dat $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. Dan geldt $\text{Min}(x_1, ..., x_n) = x_1$. Ook geldt $H(x_1) = x_1$. Omdat elk (positief) argument dat wordt toegevoegd het harmonisch totaal kleiner maakt, geldt: $H(x_1, ..., x_n) < H(x_1) = x_1 = \text{Min}(x_1, ..., x_n)$.



figuur 1

De tekening in figuur 1 kan gebruikt worden om zowel het harmonisch gemiddelde als het harmonisch totaal van twee getallen a en b $(a, b > 0)$ te illustreren. $ABCD$ is een trapezium, waarvan de diagonalen elkaar snijden in punt E. FG gaat door E en is evenwijdig aan AD en BC. Als we afspreken $c = |EF|$[5], dan geldt:

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{c}{b} \text{ (in } \Delta ABC\text{) en } \frac{|FB|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|AD|} = \frac{c}{a}$$

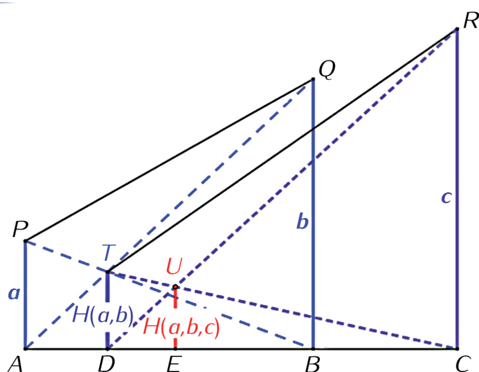
(in ΔABD).
Optellen geeft $1 = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ en beide kanten delen door c: $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Dus: $|EF| = c = H(a, b)$.

Hetzelfde geldt voor $|EG|$, immers, met $|EG| = d$:

$$\frac{|DG|}{|DC|} = \frac{|EG|}{|BC|} = \frac{d}{b} \text{ (in } \Delta DBC\text{) en } \frac{|GC|}{|DC|} = \frac{|EG|}{|AD|} = \frac{d}{a}$$

(in ΔACD).
Optellen geeft $1 = \frac{d}{a} + \frac{d}{b}$ en beide kanten delen door d: $\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

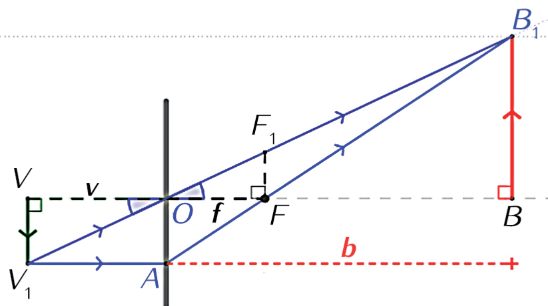
$|FG| = 2 \cdot |EF|$ is te zien als het harmonisch gemiddelde van a en b. Sommigen zullen in figuur 1 de kruisende ladders[6] herkennen.



figuur 2

Als er meer getallen in het spel zijn, dan moet de constructie van figuur 1 meerdere keren worden toegepast. Figuur 2 brengt een mogelijke aanpak in beeld. Eerst wordt met de diagonalen van trapezium *ABQP* $H(a, b)$ bepaald en daarna met de diagonalen van *DCRT* $H(a, b, c)$. Figuur 2 illustreert ook dat $H(a, b, c) < H(a, b)$ voor $a, b, c > 0$. (eigenschap 6)

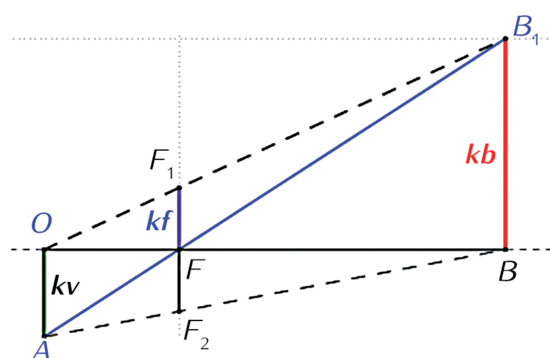
Een variant op figuur 1 kan gebruikt worden om de roemruchte lenzenformule af te leiden, voor een bolle lens met reëel beeld.



figuur 3

Figuur 3 laat schematisch de beeldvorming bij een (geïdealiseerde) positieve lens zien. Het voorwerp staat met de voet in punt *V* op een afstand *v* van de lens. Lichtstralen evenwijdig aan de hoofdas *VO* gaan door het (rechter) brandpunt *F* en dragen bij tot het beeld met voetpunt *B* op afstand *b* van de lens.
De gelijkvormigheid van de driehoeken OVV_1, OFF_1 en OBB_1 maakt het mogelijk om de lengtes van VV_1, FF_1 en BB_1 aan te geven met respectievelijk *kv*, *kf* en *kb*.
Omdat $OA = VV_1$ is het mogelijk om het drietal *kv*, *kf* en *kb* weer te geven in de afbeelding van figuur 4.

In figuur 4 hebben we het deel links van de lens (en de lens zelf) weggelaten. FF_1 is (evenals FF_2) het harmonisch totaal van *OA* en BB_1. Dus $kf = H(kv, kb)$. Volgens eigenschap 2 geldt nu ook $f = H(v, b)$, en dat is de lenzenformule.



figuur 4

Rond de lenzenformule en vervangingsweerstanden zijn heel wat oefenopgaven gemaakt. Een (voor wiskundedocenten) voor de hand liggende vraag is of en hoe de getallen zo gekozen kunnen worden dat zowel de gegeven als de gevraagde getallen geheel zijn. Er zijn inderdaad recepten om naar analogie van Pythagorese drietallen '*harmonische drietallen*' te genereren, maar in zekere zin is het recept heel eenvoudig. Als de uitkomst geen geheel getal is, vereenvoudig dan de breuk zo veel mogelijk, en vermenigvuldig vervolgens alles met de noemer van deze breuk. Deze aanpak werkt ook voor het geval er meer getallen in het spel zijn. Een paar voorbeelden:

$H(2, 3) = \frac{6}{5}$	$H(10, 15) = 6$
$H(5, 8) = \frac{40}{13}$	$H(65, 104) = 40$
$H(2, -5) = \frac{10}{3}$	$H(6, -15) = 10$
$H(2, 3, 4) = \frac{12}{13}$	$H(26, 39, 52) = 12$
$H(2, 3, 5, 5) = \frac{30}{37}$	$H(74, 111, 185, 185) = 30$

In het geval van twee argumenten *a* en *b*, die geen gemeenschappelijke factor hebben, biedt vermenigvuldiging met $a + b$ soelaas. Met behulp van formule 2 is in te zien dat dit geen toeval is.[7]

Noten

[1] Als de stukken niet even lang zijn kan gewerkt worden met een gewogen gemiddelde.
Als de eerste 6 km de snelheid 20 km/u is, de volgende 26 km 80 km/u bedraagt en de laatste 8 km 50 km/u, kan de gemiddelde snelheid (in km/u) berekend worden met:

$$\frac{1}{\left(\frac{6}{20}+\frac{26}{80}+\frac{8}{50}\right)/40}=\frac{40}{\frac{6}{20}+\frac{26}{80}+\frac{1}{50}}=\frac{40}{\frac{157}{200}}=\frac{8000}{157}\quad(\approx 51\,\text{km/u})$$

[2] Met geen enkele claim t.a.v. oorspronkelijkheid. In december 1977 stond in het tijdschrift *Pythagoras* een artikel van W. Ganzevoort met als titel *Harmonische drietallen*, waarin hij voorstelt om te spreken van 'harmonisch optellen' in dit verband. Zie *https://www.pyth.eu/jaargangen/Pyth17-3.pdf*
[3] Hierop kom ik nog terug in een vervolgartikel.
[4] Uiteraard ervan uitgaande dat er geen onderlinge beïnvloeding is van het werktempo.
[5] We geven de lengtes van lijnstukken steeds aan met behulp van | |.
[6] Zie bijvoorbeeld: *https://en.wikipedia.org/wiki/Crossed_ladders_problem*
[7] Zie ook het eerder vermelde stuk van W. Ganzevoort in *Pythagoras*.

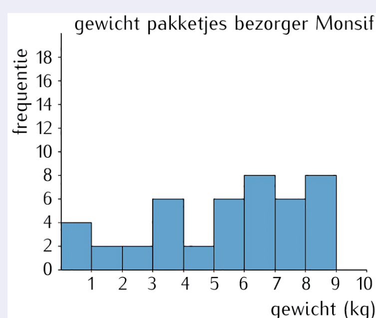
Over de auteur
Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de *WiskundE-brief*. E-mailadres: *gerardk@xs4all/.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

Lonneke Boels

HISTODOT – EEN NIEUW TYPE GRAFIEK

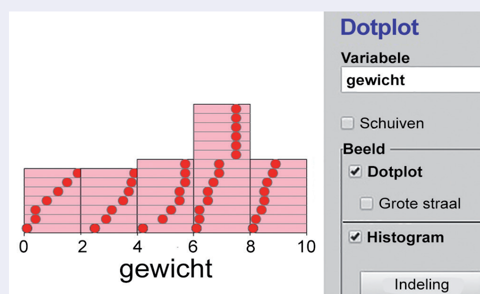
Onlangs schreef ik over de vele problemen die histogrammen opleveren voor leerlingen. Eén van deze problemen is dat leerlingen niet goed begrijpen hoe de klassenindeling in een histogram werkt. In mijn onderzoek naar hoe leerlingen histogrammen begrijpen, kwam ik bijvoorbeeld tegen dat leerlingen het onhandig vonden dat er geen getal midden onder de staaf stond, zie figuur 1. Een leerling zei dan iets als: Welk getal moet je dan nemen voor die staaf? Is het nu 1 of 2?



figuur 1 Voorbeeld van een histogram dat aangeeft hoeveel pakketjes van een bepaald gewicht deze bezorger moet bezorgen

Een ander voorbeeld van een opgave die deze leerlingen niet goed begrijpen is opgave 25 uit *Getal en Ruimte* vwo wiskunde AC deel 2, 11e editie. Daarin wordt een frequentieverdeling gegeven en wordt gevraagd wat het grootst mogelijk gemiddelde en het kleinst mogelijke gemiddelde kan zijn. Een leerling zei hierover: dat kan toch niet want er is maar één gemiddelde?

De histodot lost deze twee problemen op (en nog een paar andere) doordat de histodot laat zien dat de werkelijke waarden over de staaf verspreid liggen en dat de hoogte het aantal stippen in de staaf is. Bij opgave 25 heeft de leerling ontdekt dat de stippen zowel helemaal links als helemaal rechts in de staaf kunnen liggen en dat dit het gevraagde minimum en het maximum van het gemiddelde geeft.



figuur 2 De bijbehorende histodot in *VUstat.eu/apps*

De histodot is te vinden in VUstat.eu bij de app *Data analyse*. Kies dan bij grafieken de dotplot en vink vervolgens zowel dotplot als histogram aan (zie figuur 2). En het antwoord op de vraag van de leerling? We weten niet precies welke waarden in de staaf zitten, want dat kan in principe elke waarde in het interval zijn en daarom nemen we vaak het midden van de staaf. In dit geval dus 1,5.

MET EN/OF ZONDER COÖRDINATEN_

Dick Klingens

Dick Klingens duikt in het verleden, maar blijft ook in het heden, niet alleen bij het beantwoorden van een vraag van een WisFaq-bezoeker.

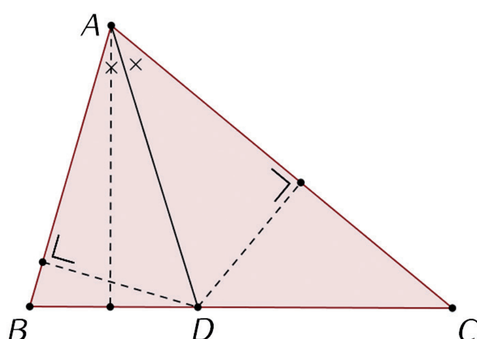
Zo maar een vraag?

In februari 2017 kwam op *WisFaq*[1] de volgende vraag binnen:

Hoe bewijs ik dat de bissectrice van een hoek van een driehoek de overstaande zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de aanliggende zijden? Deze vraag staat al op WisFaq maar ik vind het antwoord niet zonder gelijkvormigheid toe te passen. Alvast bedankt, Dries.

Het antwoord dat ik gaf, als *WisFaq*-beantwoorder, staat hieronder.

Dag Dries,
Uitgaande van een driehoek ABC waarvan de bissectrice van hoek A de zijde BC snijdt in D, kun je in ieder geval bewijzen dat de oppervlaktes van de driehoeken ABD en ACD zich verhouden als BD : CD (hoe?).
Het punt D heeft gelijke afstanden tot AB en AC (waarom?).
En dan kun je nog een keer de verhouding van de oppervlaktes van de reeds bekeken driehoeken uitdrukken in twee (andere) zijden van die driehoek.
En dan rest jou het netjes formuleren van het bovenstaande en het volledig maken van het bewijs.



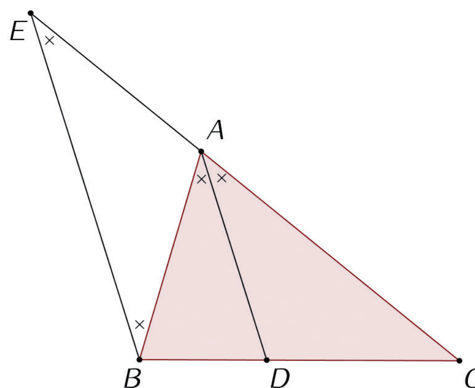
figuur 1

Uiteraard moest er voor de vragensteller ook nog wat te doen blijven, vandaar de twee vragen binnen het antwoord.

Het bewijs dat de oppervlaktes (aangeven met ϕ) van de deeldriehoeken zich verhouden als $BD : CD$ is natuurlijk standaard en elementair, zie figuur 1:
$\phi(ABD) = ½ \cdot h \cdot BD$
$\phi(ACD) = ½ \cdot h \cdot CD$
waarin h de lengte is van de hoogtelijn uit A op de zijde BC.
Uiteraard is afst(D, AB) = afst(D, BC) = d, omdat D een punt is van een bissectrice, en zo'n punt heeft gelijke afstanden tot de benen van de betreffende hoek (het is de meetkundige plaats van alle punten met die eigenschap).
En zo is ook:
$\phi(ABD) = ½ \cdot d \cdot AB$
$\phi(ACD) = ½ \cdot d \cdot AC$
En dan is direct duidelijk dat $BD : CD = AB : AC$.

Even terug in de tijd

Waarom de vragensteller zo graag een bewijs wilde zonder gelijkvormigheid, is mij niet duidelijk, maar het zou om didactische redenen kunnen zijn (student aan een lerarenopleiding?). Toen ik wat later mijn antwoord nog eens terug las, vroeg ik me af welk bewijs ik zelf voor het eerst zag... Het zal in 1958 geweest zijn, in de tweede klas van de middelbare school.



figuur 2

Ik vond het bewijs terug in een boek van Van der Neut en Holwerda[2], en dat bewijsidee gebruik ik, zie figuur 2.
Op het verlengde van CA ligt het punt E zó dat

BE // *AD*. Daarmee is dan:
∠*ABE* = ∠*BAD* = ∠*DAC* = ∠*AEB*. Waaruit blijkt dat driehoek *AEB* gelijkbenig is, met *AB* = *AE*.
Uit de evenredigheid op de lijnen *CB* en *CE* blijkt dan – en dat is het gevolg van de 1e stelling van Thales[3]:
CD : *DB* = *CA* : *AE* of *BD* : *CD* = *AB* : *AC*.
En dit is wat we wilden aantonen.

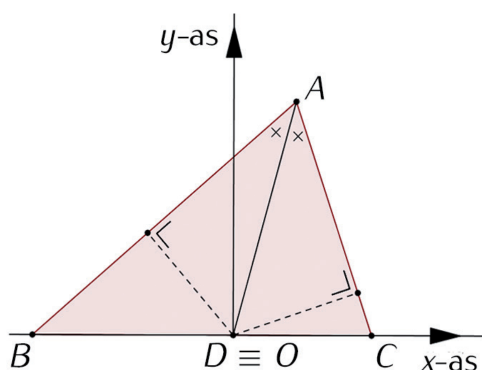
In het bovenstaande bewijs zit natuurlijk gelijkvormigheid van driehoeken verborgen: *CAD* ~ *CEB* (hh) waaruit volgt dat *CA* : *CE* = *CD* : *CB*. En volgens een niet zo vaak meer gebruikte eigenschap van evenredigheden is nu ook: *CA* : (*CE* – *CA*) = *CD* : (*CB* – *CD*). En daaruit volgt dan direct de bissectricestelling, die in [2] geformuleerd is als:

Stelling I. *Een bisectrix van een driehoek verdeelt de overstaande zijde inwendig in stukken, die zich verhouden als de aanliggende zijden.*[4,5]

Overigens, de omgekeerde bissectricestelling geldt ook:
De lijn door een hoekpunt van een driehoek en het punt, dat de overstaande zijde inwendig verdeelt in stukken, die evenredig zijn met de aanliggende zijden, is een bisectrix van die driehoek.

En weer terug in het heden

In het huidige meetkundecurriculum vinden we stelling I en haar omkering niet meer terug. Maar we kunnen er wel met een modern oog naar kijken. Hier is dat een analytisch oog: coördinaten. Eerst maar het bewijs van de stelling zelf.
We kiezen een rechthoekig assenstelsel *xOy*, met $O \equiv D$ (het voetpunt van de bissectrice van hoek *A*) en waarbij verder de drager van het lijnstuk *BC* samenvalt met de *x*-as, zie figuur 3.



figuur 3

Stellen we *A* = (*p*, *q*), *B* = (-*b*, 0) en *C* = (*c*, 0), dan hebben we de vergelijkingen:[6]

BA: $y = \frac{q}{p+b}(x+b)$

CA: $y = \frac{q}{p-c}(x-c)$

Omdat *O* op de bissectrice van hoek *A* ligt, is afst(*O*, *BA*) = afst(*O*, *CA*); we zagen dat al eerder.

Met de normaalvergelijkingen[7] van de lijnen:

$$BA:\ \frac{qx-(p+b)y+bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}}=0,\quad CA:\ \frac{qx-(p-c)y-cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}}=0$$

blijkt dan:

$$\text{afst}(O, BA) = \left|\frac{bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}}\right| = \frac{bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}},$$

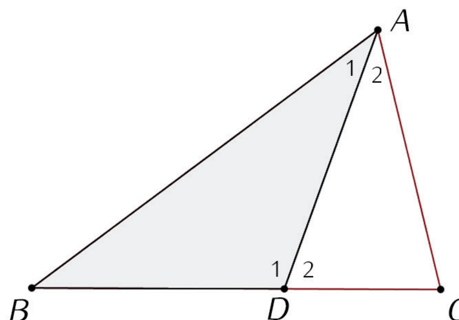
$$\text{afst}(O, CA) = \left|\frac{-cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}}\right| = \frac{cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}}$$

Uit de gelijkheid van deze uitdrukkingen en de formule voor de afstand van twee punten volgt dan:

$$\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{(p+b)^2+q^2}}{\sqrt{(p-c)^2+q^2}}=\frac{AB}{AC}$$

Waaruit blijkt dat *AB* : *AC* = *b* : *c* = *OB* : *OC*. En dat is de bedoelde verhouding op de zijde *BC* van driehoek *ABC*.

Zullen we het bewijs van de omgekeerde stelling ook met coördinaten leveren? Ik doe het hier niet, maar een bewijs met coördinaten staat in de appendix bij dit artikel. Het is het zojuist geleverde bewijs, maar dan, met enkele aanpassingen, vanaf het eind teruggeschreven. Ik denk dat ik het omgekeerde bewijs in 1958 zélf gegeven heb met een redenering uit het ongerijmde. Ook dát bewijs staat in de appendix. Nee, ik geef een eenvoudig bewijs met behulp van de sinusregel. En dit is eigenlijk wel leuk: in 1958 kon dat niet op deze manier, want de sinusregel kreeg je pas (c.q. al) in de derde klas.



figuur 4

Zie nu figuur 4. In driehoek *ABD* geldt volgens de sinus-regel: $\frac{AB}{\sin D_1}=\frac{BD}{\sin A_1}$, zodat: $AB=\frac{BD\cdot \sin D_1}{\sin A_1}$.

In driehoek *ACD* is volgens die regel: $\frac{AC}{\sin D_2}=\frac{CD}{\sin A_2}$,

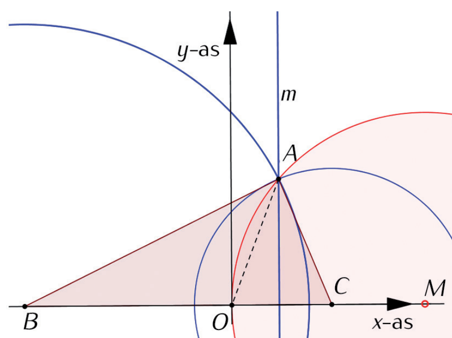
en dus: $AC=\frac{CD\cdot \sin D_2}{\sin A_2}$.

In de omgekeerde stelling is gegeven dat *AB* : *AC* = *BD* : *CD*. Daar komt bij dat $\sin D_1 = \sin D_2$ (D_1 en D_2 zijn samen 180°), met als gevolg dat $\sin A_1 = \sin A_2$. En daaruit volgt, in dit geval direct, dat $\angle A_1 = \angle A_2$. Met andere woorden: *AD* is een bissectrice van de driehoek.

De Apollonius-cirkel

De evenredigheid $AB : AC = b : c$ kunnen we ook schrijven als $AB = k \cdot b$, $AC = k \cdot c$, met $k \neq 0$.
Het punt A is daardoor ook één van de snijpunten van de cirkels:
$(x + b)^2 + y^2 = (kb)^2$
$(x - c)^2 + y^2 = (kc)^2$
We kunnen ons nu afvragen wat de meetkundige plaats is van het snijpunt A van de beide cirkels als k varieert, bij vaste punten O, B en C. Bekijken we dit met of zonder coördinaten? Ik kies voor *met*.
De coördinaten van het punt A voldoen nu ook aan het stelsel vergelijkingen:

$$S : \begin{cases} (x+b)^2 + y^2 = k^2 b^2 \\ x = \frac{1}{2}(k^2 - 1)(b - c) \end{cases}$$



figuur 5

De laatste vergelijking van S is de vergelijking van de zogeheten machtlijn van beide hierboven genoemde cirkels; in figuur 5 is dat de lijn m. En dan voldoen de coördinaten van A óók aan een combinatie van de vergelijkingen van S waarin k, en dus ook k^2, niet voorkomt. Die vergelijking is dan de vergelijking van de meetkundige plaats.
We elimineren daarom k^2 uit beide vergelijkingen:
$k^2 = \frac{2x}{b-c} + 1$, zodat:

$$(x + b)^2 + y^2 = \left(\frac{2x}{b-c} + 1\right) \cdot b^2$$

Na enig rekenwerk aan deze vergelijking vinden we:

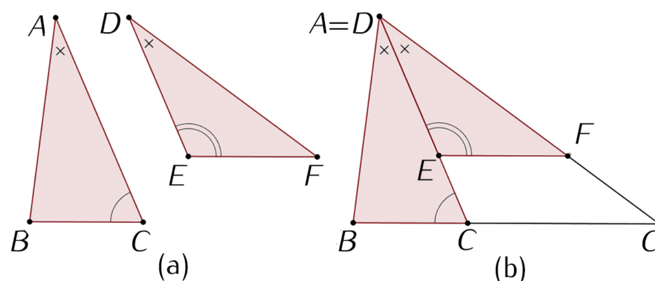
$$\left(x - \frac{b}{b-c}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2 c^2}{(b-c)^2}$$

En dit is de vergelijking van een cirkel, die gaat door het punt O en waarvan het middelpunt M op de x-as ligt.
Opmerking. Is E het tweede snijpunt van deze cirkel met de x-as, dan staat EA loodrecht op OA (2e stelling van Thales). Uiteraard kan dit ook analytisch bewezen worden.

Als we de verhouding $BO : CO$ gelijk aan r stellen ($BO : CO = r : 1$), dan noemen we de gevonden meetkundige plaats de r-Apollonius-cirkel op BC.[8]
In de appendix staat, naast een korte synthetische behandeling, een eenvoudige constructie van deze cirkel. Verder vindt de lezer daar een korte beschrijving van de (drie) Apollonius-cirkels van een driehoek.

Terug naar stelling I

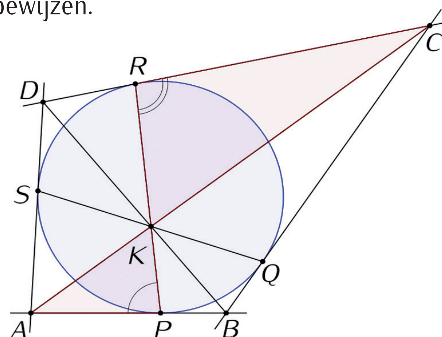
Een niet zo'n bekend, maar eenvoudig gevolg van de bissectricestelling zien we geïllustreerd in figuur 6a.



figuur 6

Van de driehoeken ABC en DEF is $\angle A = \angle D$ en zijn de hoeken C en E elkaars supplement. In deze driehoeken geldt nu:
Stelling II. $AB : DF = BC : EF$.
Ten behoeve van het bewijs hiervan plaatsen we de driehoeken tegen elkaar, zoals is weergegeven in figuur 6b. En we vullen aan met de vierhoek $CGFE$ ('natuurlijk' is daarbij $EF \,//\, CG$). Nu is, volgens de bissectricestelling in driehoek ABG:
$AB : AG = BC : GC$. In driehoek DCG ($\equiv ACG$) geldt, mede op grond van de 1e stelling van Thales:
$DG : DF = CG : EF$.
Vermenigvuldiging van beide evenredigheden geeft nu:
$\frac{AB}{AG} \cdot \frac{DG}{DF} = \frac{BC}{GC} \cdot \frac{CG}{EF}$. En hier staat niets anders dan hetgeen we wilden aantonen, omdat immers $AG \equiv DG$ is.

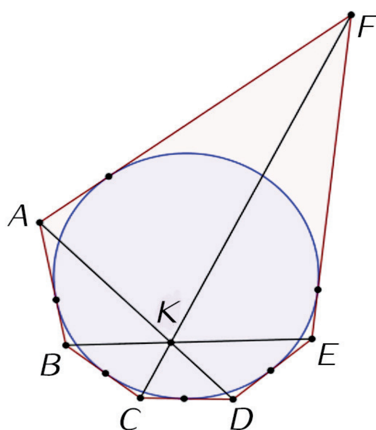
Ik heb deze eigenschap ooit eens (en dat was heel wat jaren ná 1958) gebruikt om de volgende stelling te bewijzen.



figuur 7

Stelling III. *Van een raaklijnenvierhoek gaan de diagonalen en de verbindingslijnen van 'overstaande' raakpunten door hetzelfde punt*[9].
In figuur 7 staat de raaklijnenvierhoek $ABCD$.

De punten P, Q, R, S zijn de raakpunten van de incirkel van die vierhoek met de zijden. We willen nu aantonen dat de lijnen AC, BD, PR, QS concurrent zijn in het punt K.
We nemen eerst $K = PR \,\&\, AC$[10]. In de driehoeken APK en CRK zijn de hoeken bij K aan elkaar gelijk, terwijl de hoeken bij P en R elkaars supplement zijn. Immers:
$\angle P = \frac{1}{2}\,\text{bg}(PSR)$ en $\angle R = \frac{1}{2}\,\text{bg}(RQP)$.
Conform stelling II is dan $AP : CR = KA : KC$.
Met $K' = AC \,\&\, KS$ vinden we analoog
$AS : CQ = K'A : K'C$.
Omdat $AP = AS$ en $CQ = CR$ (raaklijnstukken aan de incirkel) vinden we op het lijnstuk AC de evenredigheid
$KA : KC = K'A : K'C$.
En daaruit volgt dat $K \equiv K'$.
Met eenzelfde redenering blijkt dan dat K ook op het lijnstuk BD ligt. En daarmee zijn de in stelling III bedoelde lijnen concurrent.



figuur 8

Meestal wordt stelling III bewezen met een bijzondere vorm van de (uit de projectieve meetkunde bekende) stelling van Brianchon[11], zie figuur 8.
Stelling IV. *Als een zeshoek om een cirkel beschreven is, dan zijn de lijnen die overstaande hoekpunten verbinden, concurrent.*

De bijzondere vorm wordt hierbij bereikt door twee (handig gekozen) hoekpunten van de zeshoek ook op de cirkel te plaatsen; die hoekpunten vallen dan samen met de beide 'naastgelegen' raakpunten.[12]
Of het bewijs van stelling IV ook met gebruik van coördinaten kan, heb ik niet onderzocht.

Een appendix bij dit artikel is te vinden op de *Euclides*-site.

vakbladeuclides.nl/945klingens

Noten

[1] WisFaq is een internet-vraagbaak voor leerlingen in het voortgezet onderwijs in Nederland en in het secundair onderwijs in België. Zie voor de betreffende WisFaq-pagina: *http://www.wisfaq.nl/showrecord3.asp?id=83943*
[2] Neut, D.N. van der & Holwerda, A. (1956) *Meetkunde, Tweede Deel.* Groningen: J.B. Wolters.
[3] Naar verluidt zijn er twee stellingen die door Thales van Milete (±624-545 v.Chr., Griekenland) zijn gevonden. De eerste betreft de projectie door evenwijdige lijnen, de tweede zegt dat de grootste zijde in een rechthoekige driehoek een middellijn is van de omcirkel van die driehoek. De bedoelde eerste stelling luidt in [2]: *De stukken die drie evenwijdige lijnen van twee snijlijnen afsnijden, vormen een evenredigheid.*
[4] Het woord 'bisectrix' is Latijn. Dat dit woord de vrouwelijke uitgang 'trix' heeft, is gelegen in het feit dat het een lijn is, en dat woord is in het Latijn vrouwelijk: linea. Het hier, en meestal door ons, gebruikte 'bissectrice' is direct ontleend aan het Frans. Waarom gebruiken we in het Nederlands niet gewoon 'deellijn'?
[5] Het woord 'inwendig' betekent in deze context 'op het lijnstuk zelf liggend'.
[6] Zonder de algemene geldigheid van het bewijs aan te tasten kunnen we stellen dat $a, b, c > 0$ en $p, q > 0$.
[7] In de appendix staat een afleiding van de normaalvergelijking van een lijn.
[8] Genoemd naar Apollonius van Perga (±262-190 v.Chr., Griekenland).
[9] In de appendix staat een paragraaf als toegift met betrekking tot raaklijnenvierhoeken.
[10] De notatie $X = l \,\&\, m$ betekent: de meetkundige objecten l en m hebben het punt X als snijpunt.
[11] Naar Charles Julien Brianchon (1785-1864, Frankrijk).
[12] Zie eventueel verder: Dick Klingens (2004): *De stellingen van Pascal en Brianchon voor cirkels.* Website van de auteur: *http://www.pandd.demon.nl/pascal.htm*

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Gedurende enkele jaren was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen vanaf 2018).
E-mailadres: *dklingens@gmail.com*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Meisjes volgen vaker opleiding boven hun schooladvies

Ruim driekwart van de jongeren zit in het derde jaar van het voortgezet onderwijs op het niveau van het schooladvies van groep 8. Meer dan de helft van alle leerlingen volgt een vmbo-opleiding, en meisjes volgen vaker dan jongens een opleiding boven hun schooladvies. Ook komt dit vaker voor onder leerlingen met een niet-westerse achtergrond. Dit blijkt uit het Jaarrapport 2018 van de Landelijke Jeugdmonitor van het CBS.
De Landelijke Monitor peilt jaarlijks hoe het ervoor staat met kinderen en jongeren in Nederland. In deze elfde editie van het Jaarrapport van de Landelijke Monitor is de focus gelegd op jongeren in het derde jaar van het voorgezet onderwijs (exclusief praktijkonderwijs). In 2017/2018 zijn dit ruim 204 duizend leerlingen. Meer dan de helft van hen zit op het vmbo. Het percentage is gedaald ten opzicht van tien jaar geleden. In 2007/2008 ging 55 procent naar het vmbo, nu is dat 52 procent.
In het derde leerjaar van het voortgezet onderwijs zit ruim 75 procent van de jongeren op het niveau van het schooladvies in groep 8. Bij 11 procent van de leerlingen is de opleiding op een lager niveau dan het advies, bij 13 procent op een hoger niveau. In het vmbo zit 18 procent lager, 11 procent hoger en 71 procent op hetzelfde niveau als het advies. Meisjes krijgen in groep 8 gemiddeld een hoger advies dan jongens en in het voortgezet onderwijs worden deze verschillen groter. In 2017/2018 volgen jongens in het derde leerjaar van het voortgezet onderwijs vaker dan meisjes een lager onderwijsniveau dan het schooladvies in groep 8. Dit is bij 14 procent van de jongens en bijna 9 procent van de meisjes het geval. Tegelijk volgen meisjes vaker een hoger niveau dan het groep-8 advies, in 16 procent van de gevallen. Bij jongens gaat het om 10 procent. Dit patroon is zichtbaar op elk niveau van het voortgezet onderwijs.
Leerlingen met een niet-westerse migratieachtergrond krijgen in groep 8 meer dan gemiddeld een advies voor vmbo, in het bijzonder de beroepsgerichte leerwegen basis en kader. Het niveau dat zij in het derde leerjaar volgen, is in 2017/2018 vaker hoger dan hun schooladvies (16 procent) dan bij leerlingen zonder migratieachtergrond (13 procent).

Opvallend is dat op de theoretische leerweg van het vmbo leerlingen zonder migratieachtergrond vaker een hoger schooladvies hebben dan de leerlingen met een niet-westerse migratieachtergrond. In de basisberoepsgerichte leerweg is weinig verschil tussen beide groepen.
Bron: *https://www.avs.nl/artikelen/meisjes-volgen-vaker-dan-jongens-een-opleiding-boven-hun-schooladvies*

Kortste weg naar het miljoen

In de spelshow *De Weg Naar Het Miljoen* moest een kandidaat telkens uit tien items de vijf goede kiezen. Na elke poging kreeg de kandidaat alleen te horen hoeveel er goed zijn. Dat kleine beetje informatie kan je een heel eind op weg helpen, maar dat hadden de kandidaten blijkbaar niet door.
In menig opzicht is *De Weg Naar Het Miljoen* een commerciële spelshow volgens beproefd recept: grote zaal vol publiek, flitsend decor, gelikte presentatie door een BN'er en vette geldprijzen. Maar in dit geval is de manier waarop een kandidaat de prijzen in de wacht kan slepen ook wiskundig interessant.
De kandidaat krijgt telkens een lijst van tien items te zien, waarvan er vijf goed en vijf fout zijn. Bijvoorbeeld: tien steden, waarvan vijf een Europese hoofdstad zijn, en vijf niet. De kandidaat heeft vijf pogingen. Bij elke poging wijst hij of zij vijf items aan, en krijgt dan te horen hoeveel er goed zijn – maar niet welke goed zijn. Als de kandidaat binnen vijf pogingen vijf goed scoort, wint deze een fors geldbedrag en mag verder.
Laten we eerst maar eens kijken of blind gokken enige kans maakt: er zijn $\binom{10}{5} = 252$ echt verschillende mogelijkheden om vijf items uit een lijstje van tien te kiezen. De kans om op de eerste poging meteen alles goed te hebben, is daarom 1/252. De kans om binnen vijf pogingen alle vijf goed te gokken – waarbij je er natuurlijk voor zorgt dat je niet twee keer dezelfde gok doet – is 5/252, ofwel bijna twee procent.
Maar met gokken maak je geen gebruik van de informatie die je na elke poging krijgt. In de shows leken de kandidaten, voor zover ze al een strategie hadden, een voor de hand liggend principe aan te houden: als je na een poging te horen krijgt dat je er bijvoorbeeld vier goed hebt, verander je bij de volgende poging alleen het item waarvan je het minst zeker bent.
Laten we eens aannemen dat je vier items echt zeker weet. Dus al bij de eerste poging scoor je vier goed, terwijl je dan ook weet welk van de vijf items fout is.

Als je dan de resterende items een voor een gaat proberen kan het nog fout gaan, want dat zijn er vijf, terwijl je maar vier pogingen over hebt.
Als je er van tevoren al vier zeker weet, is er een veel effectievere methode, die in maximaal vier pogingen gegarandeerd vijf goed scoort, en dus een geldprijs oplevert.
Hoofdletters zijn de items die zeker goed zijn, kleine letters zijn items waarvan je het nog niet zeker weet, *cursieve* letters zijn foute items. In het begin zijn er tien items, waarvan je er vier zeker weet, en de rest is onzeker:
A B C D e f g h i j
Bij je eerste poging moet je juist niet alle vier de zekere items aanklikken, maar slechts twee:
poging 1) A B e f g (niet aangeklikt: h i j C D)
Er zijn maar twee mogelijke uitkomsten: twee goed of drie goed (vier of vijf kan niet, want je hebt twee goede items bewust niet aangeklikt)
1a) twee goed: e,f en g zijn fout
1b) drie goed: h,i en j zijn fout
Op je tweede poging klik je wel je vier zekere items aan, en een van de drie die nog onzeker zijn (voor het vervolg nemen we aan dat h, i en j nog onzeker zijn):
poging 2) A B C D h (niet aangeklikt: i j *e f g*)
opnieuw zijn er maar twee uitkomsten mogelijk:
2a) vijf goed: klaar op tweede poging
2b) vier goed: h is fout
poging 3) A B C D i (niet aangeklikt: j *e f g h*)
weer twee mogelijke uitkomsten:
3a) vijf goed, klaar op derde poging
3b) vier goed: i is fout.
De enige overgebleven mogelijkheid is nu, dat A B C D en J goed zijn, dus die kun je bij de vierde poging invullen.
Meer hierover is te vinden in de bron: *https://www.nemokennislink.nl/publicaties/de-kortste-weg-naar-het-miljoen/*

Alweer een nieuw grootste priemgetal

Net voor de kerstdagen, op 21 december 2018, werd een nieuw grootste priemgetal gevonden: $2^{82.589.933}-1$, een getal van 24.862.048 cijfers.
Het getal werd gevonden in het kader van de *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS) door Patrick Laroche uit Ocala, Florida. In dit project downloaden vrijwilligers een gratis programma dat zoekt naar priemgetallen op hun computers. Iedereen die zo gelukkig is om een nieuw priemgetal te vinden ontvangt een beloning. Patrick begon pas vrij recent met het zoeken naar priemgetallen en had al binnen vier maanden succes: het was pas zijn vierde poging. Eigenlijk had hij daarmee bijzonder veel geluk: sommige GIMPS priemjagers zoeken al meer dan twintig jaar zonder succes... Patrick Laroche ontving een bedrag van $3000.
Bron: https://plus.maths.org/content/gimps-sets-new-prime-record

Swier Garst gepromoveerd



Swier Garst geflankeerd door zijn paranimfen, zoon Swier jr. en schoonzus Pauline.

Op 19 oktober jl. is Swier Garst gepromoveerd in de wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. Garst onderzocht hoe de techniek van vouwen en draaien leidt tot een beter begrip van dynamische systemen.
De voltooiing van het proefschrift getiteld *Dynamics Amidst Folding and Twisting in 2-dimensional Maps* kostte hem jaren. Naast wiskundedocent aan het RGO te Middelharnis was Garst ook voorzitter van de NVvW en gaf hij les aan de Hogeschool van Rotterdam. Hierdoor kon hij alleen in zijn vrije uren aan het promotieonderzoek werken. Wanneer Swier Garst geen lesgaf, reisde hij graag af naar Delft om daar met vriend en hoogleraar Jan Aarts te werken aan zijn onderzoek. Helaas overleed Jan Aarts in juni, maar gelukkig heeft hij de goedkeuring van het proefschrift nog meegemaakt.
Bron: Nieuw Archief voor Wiskunde, december 2018

VIERDEGRAADS VERGELIJKINGEN OPLOSSEN MET PARABOLEN

Jeroen Spandaw

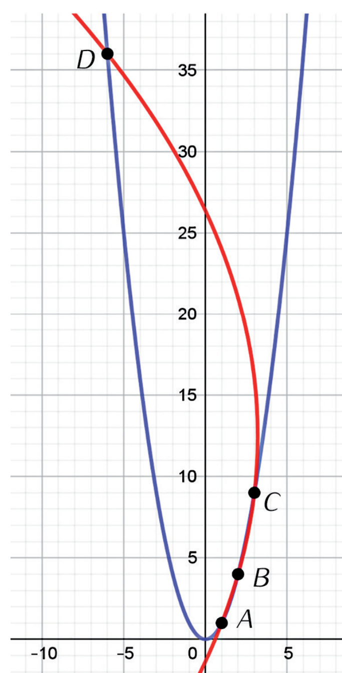
In *Euclides* van juni 2018 legt Jeanine Daems uit hoe je derdegraads vergelijkingen kunt oplossen met parabolen. In dit artikel laat Jeroen Spandaw zien hoe je vierdegraads vergelijkingen ook kunt oplossen met parabolen. Hoe je derdegraads vergelijkingen algebraïsch oplost beschrijft hij in de appendix.

Vergelijkingen van graad twee, drie, vier en hoger

Het oplossen van algebraïsche vergelijkingen in één onbekende heeft een fascinerende geschiedenis. Zo'n vierduizend jaar geleden konden Babyloniërs al tweedegraads vergelijkingen oplossen. (Ook dat kan prachtig meetkundig door de termen van $x^2 + bx + c$ op te vatten als oppervlakten van rechthoeken.) Vergelijkingen van graad 3 en 4 werden een kleine 500 jaar geleden opgelost in Italië. De smeuïge geschiedenis rondom Del Ferro, Tartaglia, Fiore, Cardano en Ferrari is te lezen op Wikipedia en in het door Jeanine Daems en Desirée van den Bogaart vertaalde boek *Wortels van de Wiskunde* van Berlinghoff en Gouvêa. Zeer aan te bevelen!
De levensgeschiedenis van Évariste Galois, die zo'n 200 jaar geleden werkte aan vergelijkingen van graad 5 en hoger, is zo mogelijk nog schilderachtiger. Je kunt hierover lezen op de genoemde plekken. Volgens Google is zijn turbulente leven bovendien minstens tweemaal verfilmd.
Terug naar de wiskunde. Samen met Paolo Ruffini en Niels Abel bewees Galois dat er geen algemene wortelformules bestaan voor graad 5 en hoger.
Met de schitterende wiskunde van Galois, wiens ideeën over symmetrie veel verder reiken dan algebraïsche vergelijkingen in één variabele, kun je bewijzen dat de oplossingen van de vergelijking $x^5 - x + 1 = 0$ überhaupt niet zijn uit te drukken in termen van rationale getallen en wortels van graad twee, drie, vier, vijf, ...

Eerste stap

We leggen de methode uit door de vergelijking $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ op te lossen. We schrijven $f(x) = x^4 - 25x^2 + 60x - 36$. Het eerste idee is om $y = x^2$ te schrijven. Nu is de vergelijking $f(x) = 0$ equivalent met $y^2 - 25y + 60x - 36 = 0$. De oplossingen van $f(x) = 0$ zijn dus de x-coördinaten van de snijpunten A, B, C, D van de verticale parabool $y = x^2$ met de horizontale parabool $y^2 - 25y + 60x - 36 = 0$, zie figuur 1.

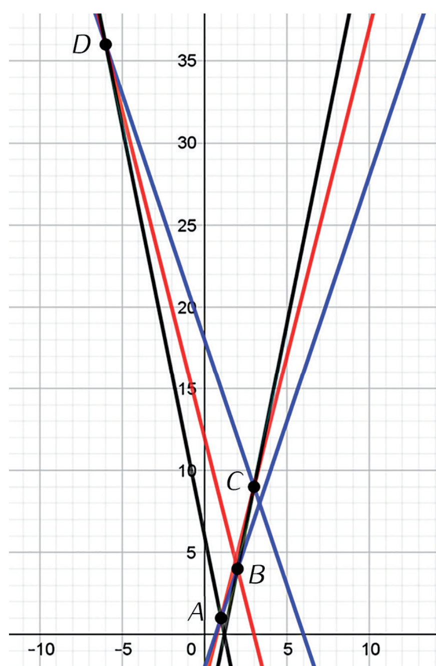


figuur 1 De horizontale en de verticale parabool
We gaan dus op zoek naar de vier snijpunten van deze twee parabolen.

Tweede stap

Om de snijpunten A, B, C, D van de twee parabolen te vinden, bekijken we de familie $p(y - x^2) + (y^2 - 25y + 60x - 36) = 0$ van tweedegraads krommen in het (x, y)-vlak geparametriseerd door p.
Voor iedere p bevat de bijbehorende tweedegraads kromme de vier snijpunten A, B, C, D van $y = x^2$ en $y^2 - 25y + 60x - 36 = 0$.
We kunnen de familie onderzoeken in GeoGebra, door een schuifje te maken voor de parameter p en de bijbehorende vergelijking in te tikken. Voor de waarden $p = 9$, 16 en 25 zie je dan iets bijzonders gebeuren: de tweedegraads kromme valt uiteen in twee lijnen l_p en m_p. Laten we deze bijzondere krommen en de bijbehorende bijzondere waarden van p *singulier* noemen.

Dergelijk gedrag hadden we al kunnen zien aankomen. Neem bijvoorbeeld de twee lijnen *AB* en *CD*. De vereniging van deze lijnen is een tweedegraads kromme door de punten *A*, *B*, *C*, *D*. Deze kromme correspondeert met een van de drie singuliere waarden voor *p*. De andere twee singuliere waarden van *p* corresponderen met $AC \cup BD$ respectievelijk $AD \cup BC$. Zie figuur 2 voor deze drie singuliere krommen $AB \cup CD$, $AC \cup BD$ en $AD \cup BC$ in blauw, rood respectievelijk zwart.



figuur 2 De drie singuliere tweedegraads krommen in de familie

We hebben nu de singuliere waarden van *p* proefondervindelijk gevonden met behulp van GeoGebra. Later zullen we uitleggen hoe je deze waarden algebraïsch kunt bepalen, maar eerst leggen we uit hoe de singuliere waarden van *p* leiden naar de gezochte vier snijpunten *A*, *B*, *C*, *D* en daarmee naar de gezochte oplossingen van de vierdegraads vergelijking $f(x) = 0$.

Derde en laatste stap

Om de snijpunten *A*, *B*, *C*, *D* van de twee parabolen $y = x^2$ en $y^2 - 25y + 60x - 36 = 0$ te bepalen, hebben we maar twee van de drie singuliere waarden voor *p* nodig. Voor $p = 9$ vinden we $-9x^2 + y^2 + 60x - 16y - 36 = 0$. Deze vergelijking beschrijft de vereniging van twee lijnen l_9 en m_9. Ze is dus te ontleden als product van twee lineaire factoren. Een beetje gepuzzel levert $-9x^2 + y^2 + 60x - 16y - 36 = (y + 3x - 18)(y - 3x + 2)$ op. De lijnen l_9 en m_9 worden dus gegeven door de vergelijkingen $y + 3x - 18 = 0$ respectievelijk $y - 3x + 2 = 0$. Analoog vinden we voor $p = 16$ de tweedegraads kromme $-16x^2 + y^2 + 60x - 9y - 36 = 0$. Ontbinden in lineaire factoren levert $-16x^2 + y^2 + 60x - 9y - 36 = (y + 4x - 12)(y - 4x + 3)$, dus de lijnen l_{16} en m_{16} worden gegeven door de vergelijkingen $y + 4x - 12 = 0$ respectievelijk $y - 4x + 3 = 0$. Snijden van l_9 en l_{16} geeft het snijpunt (-6, 36). Dus $x = -6$ is een oplossing van de vierdegraads vergelijking $f(x) = 0$! Invullen in $f(x) = x^4 - 25x^2 + 60x - 36$ laat zien dat dit inderdaad klopt. Snijden van l_9 en m_{16} geeft het snijpunt (3, 9). Dus $x = 3$ is eveneens een oplossing van de vierdegraads vergelijking $f(x) = 0$. Vervolgens snijden we m_9 met l_{16}. Dat geeft (2, 4), dus $x = 2$. Tot slot snijden we m_9 met m_{16}. Dat geeft (1, 1), dus $x = 1$. De vier oplossingen van de vierdegraads vergelijking $f(x) = 0$ zijn dus $x = 1$, 2, 3 en -6. Hiermee hebben we de vierdegraads vergelijking opgelost! De lezer kan zelf de twee lijnen l_{25} en m_{25} bepalen en vervolgens controleren dat de vier snijpunten (-6, 36), (1, 1), (2, 4) en (3, 9) van de twee parabolen ook gevonden kunnen worden door deze twee lijnen te snijden met de lijnen l_9 en m_9 of met de lijnen l_{16} en m_{16}.

Tweede stap algebraïsch

Hierboven hebben we de cruciale singuliere waarden $p = 9$, 16 en 25 gevonden met behulp van GeoGebra. Het feit dat het lukte om de kwadratische vergelijking te ontbinden als product van lineaire factoren bewees vervolgens dat onze proefondervindelijk gevonden singuliere waarden voor *p* inderdaad correct waren. Maar hoe hadden we de singuliere waarden kunnen vinden zonder GeoGebra? (Als de singuliere waarden niet geheel zijn, wordt het erg lastig om ze met GeoGebra te raden!)
We geven hier de benodigde algebra als een recept. We geven geen bewijs van de correctheid van het recept, omdat dit te ver zou voeren. Het recept gaat als volgt. Aan de derdegraads vergelijking $p(y - x^2) + (y^2 - 25y + 60x - 36) = 0$ kennen we de volgende symmetrische 3×3 -matrix toe:

$$A = \begin{pmatrix} -2p & 0 & 60 \\ 0 & 2 & p-25 \\ 60 & p-25 & -72 \end{pmatrix}$$

Op de plek linksboven in de matrix staat twee maal de coëfficiënt van x^2 en in het midden van de matrix staat twee maal de coëfficiënt van y^2. Rechtsonder staat twee maal de constante term. De matrixelementen $A_{1,2}$ en $A_{2,1}$ (dus in de eerste rij van de tweede kolom en in de tweede kolom van de eerste rij) zijn gelijk aan de coëfficiënt van *xy*. De matrixelementen $A_{1,3}$ en $A_{3,1}$ zijn gelijk aan de coëfficiënt van *x* en de matrixelementen $A_{2,3}$ en $A_{3,2}$ zijn gelijk aan de coëfficiënt van *y*.
We kunnen dit recept ook als volgt beschrijven. Aan de symmetrische matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

kennen we de vergelijking $\frac{1}{2}(ax^2 + dy^2 + f + 2bxy + 2cx + 2ey) = 0$ toe. Als je dit toepast op de matrix *A* uit de vorige alinea, vind je inderdaad de vergelijking $p(y - x^2) + (y^2 - 25y + 60x - 36) = 0$.

De determinant van de symmetrische 3×3 -matrix met elementen a, b, c, d, e, f, hierboven is per definitie gelijk aan $adf + bec + cbe - c^2d - e^2a - b^2f$. Als we dit toepassen op de symmetrische matrix bij de vergelijking $p(y - x^2) + (y^2 - 25y + 60x - 36) = 0$, vinden we de determinant $2p^3 - 100p^2 + 1538p - 7200$. De singuliere waarden vind je door de determinant gelijk te stellen aan 0. Dit is een derdegraads vergelijking, die je kunt oplossen met de meetkundige methode uit het artikel van Jeanine Daems of met de algebraïsche methode uit de appendix. Wat je ook doet, je vindt $p = 9$, 16 of 25. Het verifiëren van deze nulpunten is uiteraard een eenvoudige kwestie.

HADAMARD: 'DE KORTSTE WEG TUSSEN TWEE REËLE WAARHEDEN LOOPT VAAK DOOR HET COMPLEXE VLAK.'

Samenvattend hebben we de vierdegraads vergelijking eerst omgeschreven naar de bepaling van snijpunten van twee parabolen. Die snijpunten berekenen we door de drie singuliere krommen te vinden in de familie van tweede graads krommen door die snijpunten. Dit komt neer op het oplossen van een derdegraads vergelijking in de parameter p van die familie. Al met al brengt deze methode de vierdegraads vergelijking dus terug naar een derdegraads vergelijking. In de appendix wordt beschreven hoe een derdegraads vergelijking kan worden teruggebracht naar een tweedegraads vergelijking, die je kunt oplossen met kwadraatafsplitsen of met de *abc*-formule.

Appendix

Tot slot leggen we uit hoe je de derdegraads vergelijking $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ oplost. Analoog aan kwadraatafsplitsen schrijven we $y = x + \frac{1}{3}p$.
Omdat $y^3 = x^3 + px^2 + \ldots$ valt de kwadratische term weg wanneer we $x = y - \frac{1}{3}p$ invullen in $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. We krijgen dan een vergelijking van de vorm
$y^3 + ay + b = 0$.
Nu substitueer je $y = u + v$. Een vreemde substitutie, want je vervangt één onbekende door twee onbekenden! We zullen spoedig zien waarom dit een goed idee is. Invullen van $y = u + v$ en gedeeltelijk uitwerken leidt tot

$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 + a(u + v) + b = 0$.

We vegen de twee termen met $u + v$ bij elkaar tot $(3uv + a)(u + v)$. Nu stellen we $3uv$ gelijk aan $-a$. Met andere woorden, we schrijven $x = u + v$ met $v = -\frac{a}{3u}$.

We krijgen dan de vergelijking $u^3 + v^3 + b = 0$.

Omdat v evenredig is met u^{-1}, staat hier een vermomde kwadratische vergelijking in u^3, namelijk $u^3 - \frac{a^3}{27u^3} + b = 0$ ofwel $(u^3)^2 + bu^3 - \frac{a^3}{27} = 0$. Hiermee is de derdegraads vergelijking teruggebracht tot een tweedegraads en daarmee opgelost.
Als je deze methode toepast op een derdegraads vergelijking met drie reële wortels, zoals de vergelijking $2p^3 - 100p^2 + 1538p - 7200 = 0$ uit de vorige paragraaf met oplossingen $p = 9$, 16 en 25, dan gebeurt er iets opmerkelijks. Je vindt dan namelijk dat de kwadratische vergelijking $u^3 + v^3 + b = 0$ waar je op uitkomt een negatieve discriminant heeft! De u en de v zijn dus niet reëel, maar complex.

De oplossingen $y = u + v$ zijn wel weer reëel. Onze eerder genoemde Italiaanse helden liepen hier al in de 16e eeuw tegenaan. Zij ontdekten zo dat het nuttig kan zijn om met wortels van negatieve getallen te werken, zelfs als je alleen in reële oplossingen geïnteresseerd bent! Zoals Jacques Hadamard, die de priemgetalstelling bewees door complexe nulpunten van de Riemann-zetafunctie te bestuderen, al schreef: de kortste weg tussen twee reële waarheden loopt vaak door het complexe vlak.

Noten

[1] Daems, J. (2018). Wortels van de Wiskunde 10: Derdegraads Vergelijkingen. *Euclides 93*(7), pp. 14– 16.
[2] Berlinghoff, W. P. & Gouvêa, F.O. (2016). *Wortels van de wiskunde.* Amsterdam: Epsilon.

Over de auteur

Jeroen Spandaw is gepromoveerd en gehabiliteerd in de algebraïsche meetkunde. Sinds 2007 werkt hij als universitair docent en lerarenopleider wiskunde aan de TU Delft. Met Gerard Jeurnink en Hans Sterk verzorgt hij de landelijke Mastermath-cursus *Meetkunde* voor docenten in opleiding. E-mailadres: *j.g.spandaw@tudelft.nl*

TRAP VERVEN

OLYMPIADEPUZZEL 94-5





In deze jaargang vind je in nummers 1, 3, 5 en 7 een olympiadepuzzel, waarvan het niveau vergelijkbaar is met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Probeer de puzzel ook eens met je klas: met enig doorzettingsvermogen zal een groepje leerlingen deze puzzel misschien wel kunnen oplossen.

Birgit van Dalen
Quintijn Puite

Je wilt je trap van 14 treden verven; elke trede moet rood, wit of blauw worden. Je wilt geen twee opeenvolgende treden met dezelfde kleur. En drie opeenvolgende treden met drie verschillende kleuren mag alleen als de volgorde dan van boven naar beneden rood-wit-blauw is. Hoeveel mogelijke kleuringen van de trap zijn er?

Stuur je oplossingen uiterlijk 19 april naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel 94-3

Voor de puzzel Rode en groene hoeden hebben we twaalf inzendingen ontvangen. Sommige inzenders hebben uitspraak voor uitspraak beredeneerd wie er nu wat weet (en niet weet, want daar volgde ook weer informatie uit). Andere inzenders zijn uitgegaan van de laatste uitspraak, waardoor ze wisten dat er in elk geval twee rode en twee groene hoeden zijn, en zijn alle overgebleven mogelijkheden langsgelopen. In beide aanpakken was het lastig om precies goed te beredeneren wie er nu welke informatie kon afleiden uit wat ze zagen en uit de eerdere uitspraken. In veel van de inzendingen werden dan ook kleine denkfoutjes gemaakt die tot een verkeerde oplossing leidden.
De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de zes inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Vicky Gwosdz.

 *vakbladeuclides.nl/945olympiadepuzzel*

SOMS GAAT HET OM MEER DAN ALLEEN WISKUNDEMATERIALEN

Mirjam Abbes

Een school in Gambia krijgt wiskundematerialen van het WwF. In ruil daarvoor bieden ze een dove lerares in opleiding een stageplek. Zij helpt op haar beurt een doof meisje dat een toekomstperspectief nodig heeft. Hoe een klein beetje hulp de levens van verschillende mensen positief beïnvloedt.





Wel een gebouw, geen materialen

De Babylon Basic Cycle school is een school in Lamin, een stadje in Gambia. Sinds een paar maanden beschikt de school over een nieuw gebouw waar ze naast basisonderwijs nu ook middelbaar onderwijs kunnen geven. Het gebouw is er, maar de materialen niet. Kinderen, van wie de ouders het kunnen betalen, nemen zelf hun schrift en potlood mee. Anderen moeten het zonder doen. Er wordt alleen klassikaal lesgegeven. Dus goed opletten en soms mag je naar het bord komen om daar een som op te lossen. Deze manier van lesgeven is goed voor de leerlingen die alles snel snappen, maar als je niet zo goed in wiskunde bent hobbel je er altijd achteraan. Ik ontmoet het schoolhoofd, een zeer charmante man. Hij is helemaal in de wolken als hij hoort dat ik misschien voor wiskundematerialen kan zorgen. We vullen de papieren in en ik beloof hem dat ik hem op de hoogte zal houden.

> 'ALS NDUMBEH ZOU KUNNEN KIJKEN IN HET RESTAURANT VOOR DOVE VROUWEN, DAN ZAL ZE SNAPPEN DAT ER OOK VOOR HAAR EEN TOEKOMST IS.'

Te veel hobbels

De volgende dag zit ik met mijn Gambiaanse vriendin Binta een kop koffie te drinken. Zij is lerares Engels en drama en studeert momenteel aan de Amerikaanse Universiteit in Gambia. En zij is doof. Ik ben zo enorm trots op haar hoe zij zich heeft opgewerkt in een *horende* mannenwereld. Ze vertelt me dat ze al weken op zoek is naar een stageplek in het onderwijs. Ze moet het management op een school onderzoeken. Daar zitten Gambiaanse schoolhoofden niet op te wachten en zeker niet als het om een vrouw gaat. En ook haar doofheid maakt het moeilijk. Dat zijn te veel hobbels. Maar terwijl ze me dit vertelt denk ik aan Essa, het schoolhoofd van de dag daarvoor. Stiekem denk ik: hij wil zijn materialen wel heel graag hebben… Ik bel hem op en vertel hem over Binta. Het is doodstil aan de andere kant van de lijn. En dan heb ik nog niet eens verteld dat ze doof is. Hij moet erover nadenken. Binnen een uur belt Essa me terug en zegt dat hij en zijn staf Binta gaan aannemen. Ongelooflijk. Ik ben net zo blij als Binta. Vooral omdat ik weet wat het Essa gekost heeft om deze stap te durven zetten.

Toekomstbeeld

Binta start de maandag erop en is me zo dankbaar dat ze iets voor me terug wil doen. Ze belooft me om me te helpen met mijn eigen school in Jiboro. Dat is een klein schooltje met twintig leerlingen, die doof of zwakbegaafd zijn. We zijn anderhalf jaar geleden gestart en het loopt goed. Maar er is nog te weinig kennis op het gebied van onderwijs aan doven en zwakbegaafden. Dus haar hulp als lerares is meer dan welkom. Een week later bezoekt ze





mijn school. In de klas zit een doof meisje Ndumbeh, zeer intelligent en leergierig. Maar sinds een paar maanden is ze heel stil en teruggetrokken. En dat beïnvloedt haar leerproces. Ik vraag Binta om haar te observeren. Misschien snapt zij als dove wat Ndumbeh dwars zit.

Na de lessen zegt Binta dat Ndumbeh niet snapt wat ze op school doet. Het meisje komt haar dorp niet uit, heeft geen vrienden en heeft geen beeld van haar toekomst. Daarnaast bestaat het vermoeden dat ze misbruikt is. Het doet pijn om deze constatering te horen. Binta biedt aan om het meisje de weekenden in huis te nemen. Zij woont met haar Nederlandse man in het toeristengebied. Zij hebben een restaurant voor dove vrouwen geopend zodat deze vrouwen in hun eigen onderhoud kunnen voorzien. Als Ndumbeh daar zou kunnen kijken, dan zal ze snappen dat er ook voor haar een toekomst is en waarom ze naar school gaat.

Boegbeeld voor dove vrouwen

Het eerste weekend is Ndumbeh erg onder de indruk van wat ze allemaal ziet. Al die mensen, andere kleding, het restaurant, een fornuis, een wasmachine enzovoort. Ze begint een beetje los te komen. Ze komt voor het eerst op het strand. Binta stuurt me een filmpje van haar op en ik moet echt twee keer kijken, want ik ken Ndumbeh niet meer terug. Ze is zo vrolijk aan het lachen. Precies zoals een meisje van haar leeftijd zou moeten zijn. Binta probeert met haar te communiceren om erachter te komen wat er met haar gebeurd is, maar dat kost tijd. En ik ben zo dankbaar, omdat ik voel dat het leven van dit meisje in één klap helemaal is veranderd. Zij zou een tweede Binta kunnen worden: een boegbeeld voor dove vrouwen in Gambia. Ze is voorlopig in goede handen.
Waarom ik dit verhaal schrijf? Omdat ik de mogelijkheid heb om wiskundematerialen te kopen voor een school. En ondertussen een geweldige docente aan een stageplek kan helpen. En daardoor het leven van een 14-jarig meisje positief kan beïnvloeden. Dit is het verhaal van het kiezelsteentje dat de rimpelingen in het water veroorzaakt als je het in het water gooit. En daarmee wil ik jullie zeggen: zo zie je maar dat je nooit van tevoren weet wat het geld dat jullie beschikbaar stellen allemaal teweeg kan brengen.

Over de auteur

Mirjam Abbes is werkzaam als talendocent op een school in Lelystad. Een paar maanden per jaar werkt ze als vrijwilliger in Jiboro, een dorp in Gambia. Daar werkt ze samen met leraren in het kleuter-, basis- en middelbaar onderwijs op het gebied van lesgeven, organisatie, materiaal en hygiëne.
E-mailadres: *mirjam.abbes@isg-arcus.nl*

JAARREDE 2018

Ebrina Smallegange

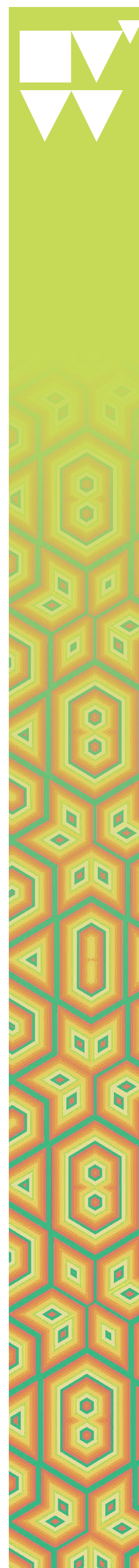
Tijdens het voorbereiden van deze jaarrede merkte ik weer: we zijn een zeer actieve vereniging. Dat wist ik natuurlijk al. Ik heb namelijk een heel druk jaar gehad als nieuwe voorzitter.
De NVvW doet veel en wil ook in het nieuwe verenigingsjaar veel blijven doen. Ik wil een aantal activiteiten met je doornemen.
Voor het gemak heb ik een indeling in vieren gemaakt. Activiteiten rondom:
1) de wiskunde die we onze leerlingen willen leren; 2) de mensen die wiskunde geven;
3) hoe we dat geven; 4) de toetsing.

Welke wiskunde geven we?

Die wiskunde is niet steeds hetzelfde: afgelopen schooljaar waren er vernieuwde vwo-examens, het jaar daarvoor vernieuwde havo-examens. De vwo-examens zijn nu zonder statistiek. Statistiek hoort nu, net als op het vmbo, in het schoolexamen. Wij willen graag weten hoe dit uitpakt in de scholen. Lukt het je om vernieuwd en vernieuwend statistiekonderwijs te geven? Wat zijn je ervaringen? Wat zijn je behoeftes? Wat kan de vereniging voor je doen? Laat het horen! Het wiskundecurriculum op havo en vwo is dus nieuw. Op het vmbo is het al jaren hetzelfde. De vereniging heeft er al lange tijd bij het ministerie van Onderwijs op aangedrongen te laten onderzoeken of wat we daar doen, nog wel het goede is. De overstap van vmbo-tl naar havo verloopt niet soepel. Het wiskundeniveau van vmbo-kader ligt niet midden tussen vmbo basis en -tl in. En hoe vergaat het onze leerlingen eigenlijk op het mbo?
Er wordt nu in opdracht van het ministerie van Onderwijs een onderzoek uitgevoerd door SLO naar deze en mogelijk andere knelpunten. Dit loopt naast het traject van curriculum.nu.
Interessant is dat de kennisbasis mbo, die opgesteld is door onze werkgroep mbo-hbo, bij dit onderzoek wordt gebruikt. Afgezien van deze curriculumperikelen is er nog iets. Ik noemde het al: curriculum.nu. Een grote algemene curriculumherziening, ook voor wiskunde. Curriculumherziening biedt kansen: de aansluiting vanuit de basisschool kan worden verbeterd, de curricula van de bètavakken kunnen op elkaar worden afgestemd, eventuele knelpunten in het wiskundecurriculum nader bestudeerd.
Het is goed om over het wiskundecurriculum na te denken. Maar is het proces dat curriculum.nu voor ogen heeft de juiste manier? We wilden wel een rol in dit proces, want niet meedoen betekent: geen invloed.
Al sinds het begin delen we onze zorgen over dit proces met de coördinatiegroep van curriculum.nu. Rechtstreeks, en samen met andere vakverenigingen. Op de inhoud reageren we steeds kritisch, maar constructief, naar het ontwikkelteam. Ik wil iedereen bedanken dit ons hierbij heeft geholpen. Individuele leden, de werkgroepen vmbo, havo/vwo, Wiskunde voor Morgen en de commissie onderwijs van PWN. In het voorjaar neemt de politiek een besluit over het vervolg. We blijven het volgen en we blijven vragen om jullie input.
Er is meer over de politiek te melden: Vorig jaar oktober was er een regeerakkoord. Daarin stond dat de rekentoets nog wel moet worden afgenomen maar niet langer meetelt in de slaag-zakregeling. En dat er uiterlijk in 2019-2020 een alternatief komt, waarbij rekenen een geïntegreerd onderdeel van het examen wordt. Helaas is de invoering vertraagd, we krijgen eerst een transitiefase. Maar ook de invoering van die transitiefase is vertraagd. Wij willen dat het alternatief zo spoedig mogelijk wordt ingevoerd. Rekenen is belangrijk! Van leerlingen wordt grote rekenvaardigheid gevraagd in de maatschappij, bij andere vakken, maar ook heel veel bij wiskunde. In de toekomst vast niet hetzelfde als in het verleden, maar het blijft belangrijk dat mensen kunnen omgaan met kwantitatieve informatie.

De mensen die wiskunde geven

Zijn er nog wiskundeleraren? Er is een tekort aan zowel eerste- als tweedegraders! Wist je trouwens dat wiskunde niet alleen wordt gegeven door wiskundedocenten, maar ook door 'groepsleerkrachten onderbouw basiskader'? Pabo'ers, die een opscholingstraject hebben doorlopen. Zijn wij hier blij mee? We zijn blij als wiskunde gegeven wordt door mensen die vakinhoudelijk en vakdidactisch geschoold zijn. Dat iedereen die wiskunde geeft weet welke wiskunde nodig is in het vervolg van de opleiding.
Ken je groepsleerkrachten? Of ben je groepsleerkracht? Laat van je horen, we zijn benieuwd naar de ervaringen!



Hoe geven we wiskunde?

Om goed wiskunde te kunnen geven, blijven we bij. We doen aan bijscholing, lezen ons vakblad, kijken bij collega's, zodat we kunnen blijven inspelen op 'de leerling van tegenwoordig'.
Als je wilt, krijg je aan het einde van de studiedag een certificaat opgestuurd als bewijs dat je er was. Dit certificaat kun je uploaden naar het register. Dat register heet nu: het portfolio. Dat is vrijwillig, want door alle commotie rond de Onderwijscoöperatie is het niet gelukt om op een goede manier een verplicht register in te voeren. De trouwe bezoeker aan deze jaardag weet dat de Vereniging graag een goed register ziet. Maar ook wij waren kritisch over de manier waarop de Onderwijscoöperatie hiermee omging. We zijn dan ook blij dat er nu gekeken wordt naar andere manieren om nascholing en andere professionalisering bij te houden. Andere professionalisering is bijvoorbeeld met collega's uitwisselen, 'collegiaal leren.' En dat kan bij onze werkgroepen. En via onze facebookgroep Leraar wiskunde, met al meer dan 4000 leden, waaronder veel vmbo-docenten, maar ook docenten havo en vwo.
Liever traditionelere nascholing? Conferenties? We hadden al driemaal de vmbo/onderbouw hv-conferentie, de *Onderwijs meets Onderzoek conferenties*, de symposia van de werkgroep Geschiedenis, de PoVo-conferenties en de conferentie *Optimaal naar het eindexamen* vanwege het nieuwe examenprogramma van havo en vwo. Op 12 maart 2019 krijgt deze conferentie een vervolg: *De examenconferentie*, nu ook voor vmbo. Deze en andere conferenties worden natuurlijk aangekondigd in onze nieuwsbrief, in ons fantastische vakblad *Euclides* en via de site. Gebruik je trouwens de app die bij *Euclides* hoort? Daarmee kun je altijd, waar dan ook, via je smartphone de *Euclides* lezen en linkjes aanklikken naar verdere achtergrondinformatie. De NVvW biedt dus volop gelegenheid om uit te wisselen hoe we wiskunde zo interessant, aansprekend en toekomstgericht mogelijk kunnen aanbieden. Je bent van harte uitgenodigd om daar een rol in te vervullen. Wil je op dit gebied iets delen, laat je horen! Via onze facebookgroep, een artikel in Euclides, of tijdens een van de conferenties of op het forum van onze website. Het forum kennen veel mensen van de examentijd: het examenforum. Maar er is ook een discussieforum van de Vereniging. Vorig jaar waren er meer dan 2000 reacties op het examenforum, het discussieforum is veel rustiger. Misschien is dat discussieforum niet het geijkte medium meer? Heb je hier ideeën over? Deel ze met ons! Het examenforum voorziet in ieder geval wel in een behoefte. Dit forum is alleen voor leden. Daardoor weet je dat je reacties en vragen alleen door collega's worden gelezen, en niet door leerlingen of ouders.

Toetsing

Een wiskundeleraar moet heel wat toetsen samenstellen en de leerlingen voorbereiden op het eindexamen. De NVvW organiseert conferenties met workshops die hierover gaan. En wist u dat WisBase.nl een van de werkgroepen van de vereniging is? Wisbase.nl heeft een website waarop o.a. toetsmateriaal gedeeld kan worden. Er is voor deelnemers wel een check of ze wel echt docent zijn!
De Vereniging ondersteunt dus docenten bij het maken van toetsen en het voorbereiden op het eindexamen. Maar ook aan de andere kant is de vereniging actief. Bijvoorbeeld: we hebben afgelopen jaar meegewerkt aan een onderzoek van het CvTE naar alternatieven voor de grafische rekenmachine. Een link naar het rapport hiervan en een link naar het laatste nieuws hierover staat op onze site.
Ook op andere momenten overleggen we met het CvTE. We hebben dit jaar over de digitale examens van vmbo basis en kader gesproken. We overleggen ook ieder jaar over de schriftelijke examens. Dat doen we in het najaar, als het stof van de hectische examentijd wat is neergedaald. We willen daarom weten wat je bezighoudt in de examentijd, maar we mengen ons niet in een discussie over examenopdrachten. We uiten ons in de examentijd hierover niet via de media of via social media. We nemen wel de opmerkingen en de meningen van onze leden mee naar het najaarsoverleg. Daarom is het zo belangrijk je te laten horen!

Tot besluit

Ik heb laten zien hoe de vereniging zich ook komend jaar zal richten op de inhoud van de wiskunde, op de wiskundeleraren, hoe we wiskunde leren en hoe we dat toetsen. Een willekeurige indeling in vieren, die voor mij wat orde bracht in de veelheid aan activiteiten. Maar één activiteit paste niet in mijn indeling: Het Wereld Wiskunde Fonds. Dit WWF financiert al 25 jaar projecten in het buitenland die met het wiskundeonderwijs te maken hebben.
Vandaag heb ik een paar keer gevraagd om het bestuur aan te spreken of te schrijven. We hebben diverse werkgroepen die het bestuur adviseren. Meld je aan als je mee wilt praten in zo'n werkgroep. Zo kunnen we een actieve vereniging van wiskundeleraren blijven.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2019

do 21/3
LANDELIJK
Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

vr 5/4
AMSTERDAM
Congres Leve de Wiskunde! voor docenten en leerlingen
Organisatie: it's academy

di 15/4
AMSTERDAM
Congruentierekening. Lezingen en werkcollege over modulorekenen
Organisatie: it's academy

di 23/4 t/m 24/4
VELDHOVEN
Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie: KWG en PWN

vr 23/8 t/m 24/8, vr 30/8 t/m 31/8
AMSTERDAM en EINDHOVEN
Vakantiecursus 'Deep Learning'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 94

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	7 mei 2019	4 maart 2019
7	25 juni 2019	29 april 2019

CASIO

Casio fx-CG50

Vertrouwde functionaliteit, betrouwbaar en intuïtief te gebruiken

De Casio fx-CG50 heeft een moderne vormgeving, beschikt over een kleurendisplay met hoge resolutie en is voorzien van een makkelijk te gebruiken examenstand. Naast de vertrouwde toepassingen kunt u uw grafische rekenmachine nu ook gebruiken met een extra functionaliteit: programmeren in Python. Hiervoor hoeft u uw Casio fx-CG50 alleen te updaten naar OS versie 3.20. U vindt de update op edu.casio.com.



Programmeer in Python met de Casio fx-CG50

```
GGD.py                001/007
def GGD(a,b):
   r=a%b
   if r==0:
      return b
   else:
      return GGD(b,r)
FILE  RUN  SYMBOL  CHAR  A⇔a  ▷
```

```
* SHELL Initialized *
>>>from GGD import *
>>>GGD(288,135)
9
>>>GGD(80, 27)
1
>>>|
RUN                  A⇔a  CHAR
```

Bestel direct uw docentenexemplaar voor maar € 39,50*
Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer.

* Inclusief btw en verzending